Trasformata di Fourier

	Tipo	di	trasformata
Trasformata	$F(\omega)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x}\cdot f(x)d(x)$	$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x}\cdot f(x)d(x)$	$F(f)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fx}\cdot f(t)d(t)$
Antitrasformata	$f(x)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x}\cdot f(\omega)d(\omega)$	$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x}\cdot F(\omega)d(\omega)$	$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi fx}\cdot F(f)d(f)$
Unitaria	si	no	si
Utilizzo	Matematica	Ingegneria o fisica	Ingegneria
Caratteristica fondamentale	Simmetria delle formule di f(x) è F(x)	E' un caso particolare della Trasformata di Laplace, tramite la sostituzione $s \to j\omega$	Pratica per le telecomounicazioni
Tipo usato in questo foglio			X

Legame Laplace - Fourier

Laplace	Fourier
$L[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-s\cdot t}\, dt$	$F(f)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fx}\cdot f(t)d(t)$
$s=\alpha+j\cdot\beta \to$ numero complesso	$j\cdot 2\pi f \to$ numero immaginario puro
esiste solo per $\mathrm{Re}(s)\geq\sigma$, dove σ è l'ascissa del semipiano di convergena	Esiste per qualsiasi valore di ω

Forma trigonometrica

Ricordando che $e^{jx}=\cos(x)+j\,\mathrm{sen}(x)$, da ciascuna definizione di trasformata si può ricavare la rispettiva forma trigonometrica, in funzione di seni e coseni.

$$F(f)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\cos(2\pi f\cdot t)dt - j\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\mathrm{sen}(2\pi f\cdot t)dt$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(f)\cos(2\pi f\cdot t)df + j\cdot\int_{-\infty}^{\infty} F(f)\cdot\mathrm{sen}(2\pi f\cdot t)df$$

Proprietà

<u>a)Parità</u>

$$\begin{array}{ccccc}
f(x) & = & f_{pari}(t) & + & f_{dispari}(t) \\
 & & \updownarrow & & \updownarrow \\
F(f) & = & F_{pari}(f) & + & j\cdot F_{dispari}(f) \\
 & & \updownarrow & & \updownarrow \\
F(f) & = & \mathrm{Re}[F(f)] & + & j\cdot \mathrm{Im}[F(f)] \\
 & & \updownarrow & & \updownarrow \\
F(f) & = & \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\cos(2\pi f\cdot x)dx & + & j\cdot\left[-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\mathrm{sen}(2\pi f\cdot x)dx\right]
\end{array}$$

Inoltre: $|F(f)|^2 \to$ pari

$\angle F(f) \to$ dispari

<u>b) Limite all'infinito</u>: $\lim_{\omega\to\pm\infty} F(f)=0$

c) <u>Supporto:</u> a) Se f(t) è a supporto limitato, F(f) è a supporto illimitato

b) Se F(f) è a supporto limitato, f(t) è a supporto illimitato

NOTA: non vale necessariamente il viceversa di ciascuna affermazione.

Andamento asintotico: Significato: più la funzione è regolare, più la trasformata decresce rapida.

Espressione matematica: $F(f)\sim\frac{1}{|f|^{N+2}}$

$f \to$ variabile

$N \to$ classe di derivabilità

Proprietà

Proprietà	Funzione	Trasformata
Linearità	$F[\alpha \cdot a(t)+\beta \cdot b(t)]$	$\alpha \cdot A(f)+\beta \cdot B(f)$
Scalamento nel tempo	$F[a(c \cdot t)]$	$\frac{1}{\lvert c\rvert} \cdot A(\frac{f}{c})$
Scalamento nella frequenza	$F\left[\frac{1}{\lvert c\rvert} \cdot a(\frac{t}{c})\right]$	$A(c \cdot f)$
Traslazione nel tempo	$F[a(t-t_0)]$	$e^{-j\, t_0\, 2\pi f} \cdot A(f)$
Traslazione della frequenza	$F[e^{j\, 2\pi f_0 \cdot t} \cdot a(t)]$	$A(f-f_0)$
Modulazione	$a(t)\cos(c \cdot t)$	$\frac{1}{2}[A(f-c)+A(f+c)]$
Trasformata di una derivata	$F[a(t)^{(n)}]$	$(j2\pi f)^n \cdot A(f)$
Derivata di una trasformata	$F[(t)^n \cdot a(t)]$	$\left(\frac{j}{2\pi}\right)^n A(f)^{(n)}$
Convoluzione	$F[a(t) * b(t)]$	$A(f) \cdot B(f)$
Prodotto	$F[a(t) \cdot b(t)]$	$A(f) * B(f)$
Trasformata di trasformata	$F[A(f)]$	$a(x)$
Coniugazione	$F\left[\overline{a(t)}\right]$	$\overline{F[-f]}$
Inversione temporale	$F[f(-t)]$	$F(-f)$
Simmetria	$F(f)$	$F^*(-f)$
Legame serie Fourier	c_n	$\frac{1}{T} \cdot F(f)\rvert_{f=\frac{n}{T}}$

Trasformate principali

Funzione	Trasformata
1	$\delta(f)$
t^k	$\left(\frac{j}{2\pi}\right)^k \cdot \delta^{(k)}(f)$
$\frac{1}{t^n}$	$-j\pi \cdot \frac{(-j2\pi f)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot sgn(f)$
$\frac{1}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\frac{1}{\sqrt{\lvert f\rvert}}$
$\frac{1}{1+t^2}$	$\pi \cdot e^{-\lvert f\rvert}$
$e^{ja \cdot t}$	$\delta(f-\frac{a}{2\pi})$
$e^{-a \cdot \lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$
$e^{-a \cdot t^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{(\pi f)^2}{a}}$
$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
$sen(k \cdot t)$	$j\frac{1}{2}\left[\delta(f+\frac{a}{2\pi})-\delta(f-\frac{a}{2\pi})\right]$
$\cos(k \cdot t)$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f+\frac{a}{2\pi})+\delta(f-\frac{a}{2\pi})\right]$
$sen(k \cdot t^2)$	$-\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \cos\left(\frac{\pi^2 f^2}{a}-\frac{\pi}{4}\right)$
$\cos(k \cdot t^2)$	$+\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot sen\left(\frac{\pi^2 f^2}{a}-\frac{\pi}{4}\right)$
$\sin c(a \cdot t)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} rect\left(\frac{f}{a}\right)$
$\sin c^2(a \cdot t)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} tri\left(\frac{f}{a}\right)$
$\delta^{(n)}(t)$	$(j2\pi f)^n$
u(t)	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{j2\pi \cdot f}+\delta(f)\right)$
$rect(a \cdot t)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} \sin c\left(\frac{f}{a}\right)$
$tri(a \cdot t)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} \sin c^2(\frac{f}{a})$
$sign(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$