Sviluppi di Taylor

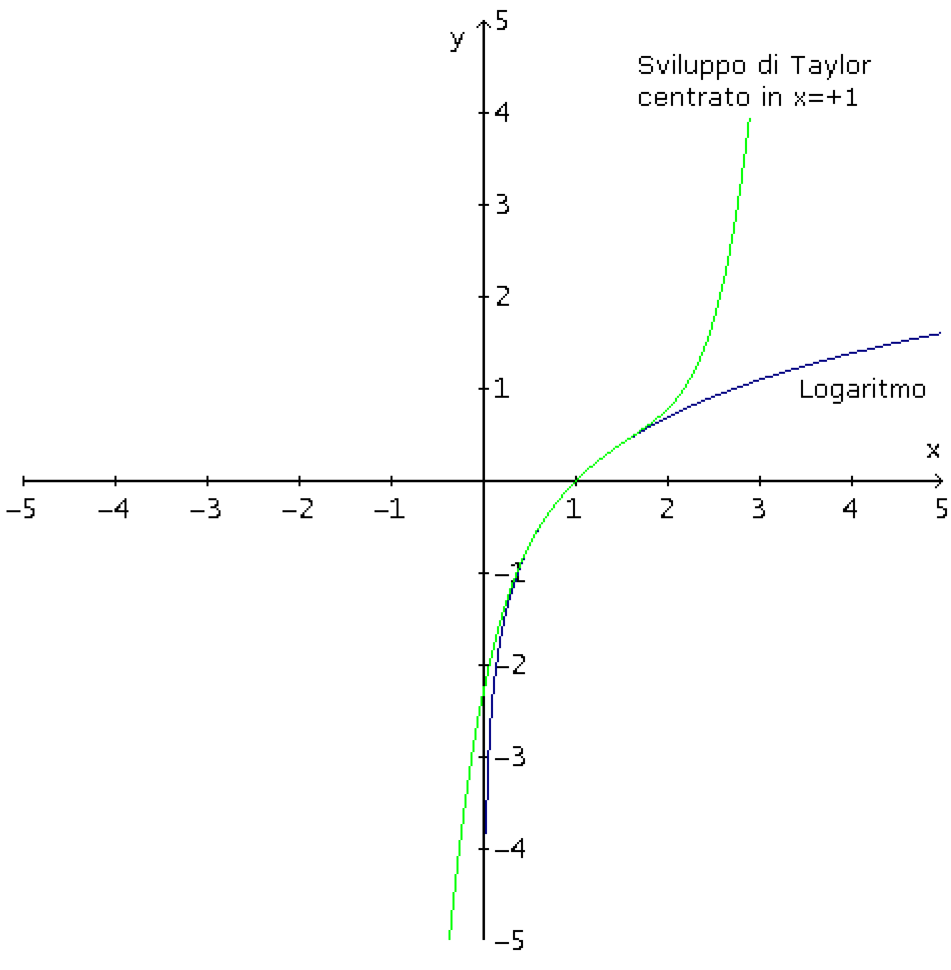
Caratteristiche
Gli sviluppi di Taylor sono un procedimento matematico che permette esprimere molte funzioni di vario tipo (esponenziali, trigonometriche, ecc) sotto forma di funzioni razionali fratte.

1) Serie di potenze: Lo sviluppo di Taylor si presenta come una serie di potenze con un coefficiente numerico, del tipo:

$$a \cdot x^n$$

Dove: a = Coefficiente numerico
n = esponente della potenza
x = variabile dello sviluppo

La serie di potenze parte da un esponente n=0 e va fino a un esponente n a scelta. Se la serie di potenze è infinita, lo sviluppo della funzione coincide con la funzione stessa, e l'errore è nullo.
2) Ordine dello sviluppo: per essere identico alla funzione, lo sviluppo di Taylor dovrebbe avere infiniti termini. Nella realtà ciò non è possibile, e la serie di potenze ha un numero finito di termini. L'ordine dello sviluppo è un numero che indica quali termini scartare e quale considerare: tutti i termini con esponente maggiore dell'ordine sono scartati.
3) Approssimazione: tutti i termini scartati sono contenuti dentro a un insieme matematico chiamato *O* piccolo. Affinchè lo sviluppo sia completo, insieme alla funzione deve essere scritto anche Opiccolo. Questo insieme risponde a precise regole di calcolo, che gli permettono di essere inserito all'interno delle normali operazioni di calcolo.
2) Centro dello sviluppo: lo sviluppo di Taylor è sempre centrata in un punto, nel quale approssima la funzione data con ottima precisione. Man mano che ci si allontana dal punto il cui lo sviluppo di Taylor è centrato, l'errore tra la funzione originale e lo sviluppo diventa sempre più grande.



La figura mostra la funzione:

$$f(x) = \log(x)$$

e lo sviluppo di Taylor della funzione f(x) centrato in x=1:

$$f(x) \approx \frac{12x^5 - 75x^4 + 200x^2 + 300x - 137}{60}$$

Calcolo dello sviluppo di Taylor

Metodo A: Formula generale
Per calcolare lo sviluppo di Taylor centrato in un punto si utilizza la formula di Taylor con resto di Peano

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{d^k[f(x_0)]}{dx^k}\cdot(x-x_0)^k+o[(x-x_0)^n]$$

Metodo B: Sviluppo di Maclaurin e traslazione
Per sviluppare una funzione f(x) nel punto p, si sviluppa la funzione in x=0, e poi si trasla lo sviluppo in x=p. Questo metodo permette di ricordare a memoria solo lo sviluppo in zero di ogni funzione, evitando di dover calcolare derivate di funzioni complicate. Lo sviluppo di Taylor centrato in zero si chiama *Sviluppo di Maclaurin*.

Esempio:
Calcolare lo sviluppo di Taylor al terzo odine della funzione f(x) centrata in p:

$$f(x)=sen(x) \quad \text{p=1}$$

a) Calcolo lo sviluppo in zero di f(x) al terzo ordine:

$$f(x)_0 \approx x-\frac{x^3}{6}$$

b) Traslo la funzione nel punto p:

$$f(x)_p \approx (x-1)-\frac{(x-1)^3}{6} \;\rightarrow\; f(x)_p \approx -\frac{5}{6}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$$

Che risulta essere proprio lo sviluppo di Taylor al terzo ordine della funzione f(x) centrato in x=1.

O piccolo

L'Opiccolo è l'operatore matematico che contiene tutti i termini scartato dallo sviluppo di Taylor. Risponde alle seguenti regole matematiche:

Operazione	Risultato
$o(x^n)\pm o(x^n)$	$o(x^n)$
$\alpha\cdot o(x^n)$ con $\alpha\in\mathbb{R}$, costante	$o(x^n)$
$x^m\cdot o(x^n)$	$o(x^{m+n)}$
$o(x^m)\cdot o(x^n)$	$o(x^{m+n)}$
$o(o(x^n))$	$o(x^n)$
$o(x^n+o(x^n))$	$o(x^n)$

Sviluppi di MacLaurin

Funzioni varie

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots. + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + a \cdot x + \frac{a \cdot (a-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot (a-n+1)}{n!} \cdot x^n$$

Funzioni trigonometriche circolari

$$sen(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7$$

$$\text{arcsen}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152} + \ldots.$$

$$\text{arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} - \frac{35x^9}{1152} - \ldots.$$

$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Funzioni trigonometriche iperboliche

$$\sinh = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$tgh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7$$

$\text{arcosh}(x) \rightarrow \nexists$ lo sviluppo di Taylor in 0, perchè arcosh(x) inizia in x=1 con tg verticale.

$$\text{arcsenh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152} - \ldots.$$

$$\text{arctgh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$