Scomposizione di funzioni razionali fratte

1) Riduzione alla forma propria

A) La funzione razionale fratta deve essere propria. Ciò significa che il grado del numeratore deve essere strettamente minore del grado del denominatore. Se il grado del numeratore è minore o uguale al grado del denominatore, si esegue la divisione tra polinomi:

Grado Numeratore < Grado Denominatore $\Rightarrow$Forma propria
Grado Numeratore $\geq$ Grado Denominatore $\Rightarrow$ Forma impropria $\Rightarrow$ Divisione

B) Il coefficiente del termine di grado maggiore del denominatore deve essere sempre 1 (funzione monica). Se il coefficiente del termine di grado massimo del denominatore è un valore qualsiasi a, si divide numeratore e denominatore per questo numero.

2) Scomposizione della funzione con il metodo A-B-C

A) Si scompone il denominatore in fattori semplici, del tipo:

$$(s-a)$$

Dove $a \in \mathbb{R}$ oppure $a \in \mathbb{C}$

B) Si scrivono tante frazioni quante sono i fattori che compongono il denominatore, seguendo questo criterio: si scrive un numeratore di un grado inferiore rispetto al denominatore, con coefficienti letterali:

- Denominatore semplice: $(s+a) \quad \rightarrow \quad \frac{A}{s+a}$
- Denominatore di grado maggiore di 1: $(s^3+s^2+s+1) \quad \rightarrow \quad \frac{As^2+Bs+C}{s^3+s^2+s+1}$
- Denominatore con potenza perfetta: $(s+1)^3 \quad \rightarrow \quad \frac{As^2+Bs+C}{(s+1)^2}$ (come sopra - caso generale)

$$(s+1)^3 \quad \rightarrow \quad \frac{As^2}{(s+1)^3}+\frac{As}{(s+1)^2}+\frac{B}{s+1}$$ (metodo particolare)

c) Si esegue il minimo comun denominatore della funzione scomposta.
d) Si svolgono i conti e si esprime in funzione di s.
e) Si uguagliano i coefficienti di s del numeratore della funzione ottenuta ai rispettivi coefficienti di s del numeratore della funzione da antitrasformare:
e) Si risolve il sistema, considerando come variabili A, B, C,....
f) I valori di A, B, C,.... ottenuti sono i valori da sostituire nella scomposizione iniziale

Esempio:

$$\frac{4s^2+2s-1}{(s-2)(s-1)^2} \rightarrow \frac{A}{s-2}+\frac{Bs}{(s-1)^2}+\frac{C}{s-1} \rightarrow \frac{s^2\cdot(A+B+C)+s\cdot(-2A-2B-3C)+(A+2C)}{(s-2)\cdot(s-1)^2}$$

$$\left\{\begin{matrix} A+B+C=4 \\ -2A-2B-3C=2 \\ A+2C=-1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} A=19 \\ B=-5 \\ C=-10 \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{19}{s-2}-\frac{5s}{(s-1)^2}-\frac{10}{s-1}$$

3) Scomposizione della funzione con i residui

Terminologia: Zeri Z_n: valori che azzerano il numeratore
Poli P_n: valori che azzerano il denominatore
Molteplicità λ: numero di volte che una radice (zero o polo) compare nella scomposizione di un polinomio

Si segue il seguente metodo per scomporre:

A) Si scompone il denominatore in fattori semplici, del tipo:

$$(s-\alpha)$$

Dove $\alpha \in \mathbb{R}$ oppure $\alpha \in \mathbb{C}$

B) Si scrivono tante frazioni quante sono i fattori che compongono il denominatore.
Se il denominatore è una potenza, si scrivono per quel denominatore tante potenze quante l'esponente del denominatore:

$$\frac{Numeratore}{(s-\alpha)(s-\beta)^2} \rightarrow \frac{A}{s-\alpha} + \frac{B}{s-\beta} + \frac{C}{(s-\beta)^2}$$

C) Il coefficiente A di un fattore con polo p si calcola con la seguente formula:

$$A = \left[\frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k [(s-p) \cdot F(s)]}{ds^k} \right]_{s=p}$$

Dove: A = coefficiente del fattore da calcolare
(s-p) = fattore del denominatore preso in esame
p= polo, reale o complesso, che annulla il fattore preso in esame
k = coefficiente che indica quale molteplicità si sta considerando del polo p, partendo a contare dal denominatore con grado massimo. Per i poli semplici sarà quindi sempre 0, mentre per un polo con molteplicità 2 assumerà i valori di 0 e 1.