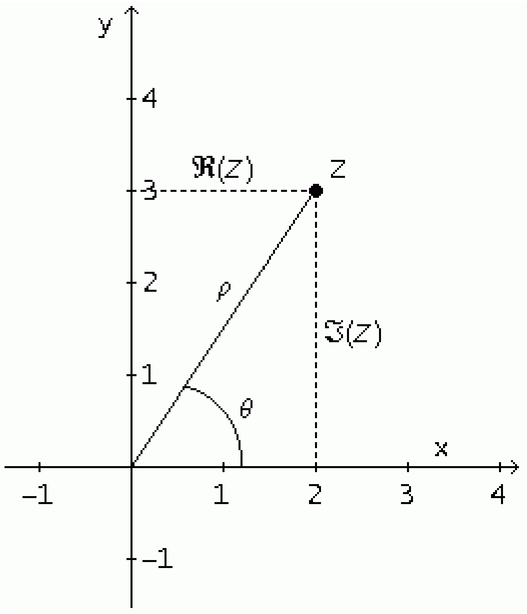
N u m e r i   c o m p l e s s i



Il calcolo tradizionale si svolge utilizzando numeri appartenenti all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, del quale fanno parte i numeri naturali $\mathbb{N}$, relativi $\mathbb{R}$, ecc. Tuttavia in questo insieme non sono accettate le radici pari di numeri negativi:

$$\sqrt{-1} = \text{Impossibile}$$
$$\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

Per risolvere questo problema e poter eseguire calcoli con qualsiasi tipo di numero, è stato creato l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. I numeri complessi non esistono nella realtà. Sono solo un modello matematico molto pratico per studiare la realtà.

Definizione del numero complesso

L'elemento che distingue i numeri complessi da quelli reali è il termine i o j. E' definito come:

$$\sqrt{-1} = i$$
$$\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$$

Un generico numero complesso z è formato da una parte reale e una parte immaginaria:

$$z = x + y \cdot i$$

$\Re(z)$ = parte reale = x
$\Im(z)$= parte immaginaria = $y \cdot i$

Dove: x = numero reale
y = numero reale
i = unità immaginaria, che vale $i = \sqrt{-1}$

Coniugato di Z

Definizione: il coniugato di z è il numero complesso che ha stessa parte reale e parte immaginaria cambiata di segno

Significato grafico: il coniugato di z è il numero complesso simmetrico di z rispetto all'asse reale delle X

Formula: $x - y \cdot i$

Simbolo: $\bar{z} = z^*$

Proprietà: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ $\qquad z + \bar{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ $\qquad z - \bar{z} = 2 \cdot \mathrm{Im}(z)$

$\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in R$ $\qquad \frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$

Modulo di Z

Definizione: il modulo di Z è la radice quadrata della somma dei quadrati dei coefficienti della parte reale e della parte immaginaria

Significato grafico: il modulo di z è la distanza dall'origine del punto che rappresenta z nel piano

Formula: $\sqrt{x^2 + y^2}$

Simbolo: $|z|$

Proprietà: $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$ $\qquad |z| \le |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ $\qquad |z_1 + z_2| \ge ||z_1| + |z_2||$

$|\bar{z}| = |z|$ $\qquad |\mathrm{Re}(z)| \le |z| \quad |\mathrm{Im}(z)| \le |z|$

$|z|^2 = \bar{z} \cdot z$

Forme di rappresentazione

Forma cartesiana
Forma del numero: $\Re(z) + \Im(z)$
Esempio: 5 + 4i
Grafico: piano cartesiano con assi perpendicolari
Asse X : è rappresentata la parte reale di z
Asse Y: è rappresentata la parte immaginaria di z

Forma polare
Forma del numero: $z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot sen\theta)$
$\rho =$ modulo del numero complesso, cioè il segmento $\overline{OZ}$
$\theta =$ fase del numero complesso, cioè l'angolo tra il semiasse positivo X della parte reale di z, e il segmento $\overline{OZ}$
Esempio: $5 \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4})$
Grafico: Il grafico di z si ottiene tracciando un segmento $\overline{OZ}$ di lunghezza ρ che forma con il semiasse positivo delle X un angolo θ.

Forma esponenziale
Forma del numero: $z = \rho \cdot e^{i \cdot \theta}$
$\rho =$ Modulo del numero complesso z
$\theta =$ fase del numero complesso z
Esempio: $z = 5 \cdot e^{\frac{\pi}{4} \cdot i}$
Grafico: il grafico si realizza utilizzando il piano polare, come nella forma polare (vedi)

Conversioni

Da Cartesiana a Polare
Modulo $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Fase: Metodo A: $\theta = \left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cdot \cos(\theta) \\ y = \rho \cdot sen(\theta) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \theta = \arccos\left(\frac{x}{\rho}\right) \\ \theta = \text{arcsen}\left(\frac{y}{\rho}\right) \end{array} \right\}$

Metodo B: $\theta = \left\{ \begin{array}{c} \text{arctg}(\frac{y}{x}) \text{ se } y>0 \\ \text{arctg}(\frac{y}{x}) + \pi \text{ se } y<0 \end{array} \right\}$

Da Polare a Cartesiana
Ricordando la forma polare:

$$z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot sen\theta)$$

Si può subito scrivere che:

$$\Re(z) = \rho \cdot \cos\theta$$
$$\Im(z) = \rho \cdot i \cdot \text{sen}\,\theta$$

Formule di Eulero
Le formule di Eulero legano le funzioni trigonometriche di variabili complesse con gli esponenziali. Sono quindi lo strumento per svolgere i calcoli trigonometrici con variabili complesse.

$$sen(x) = \frac{e^{i \cdot x} - e^{-i \cdot x}}{2 \cdot i}$$
$$\cos(x) = \frac{e^{i \cdot x} + e^{-i \cdot x}}{2}$$
$$e^{i \cdot x} = \cos(x) + i \cdot sen(x)$$

Operazioni

Sono dati due numeri:

$$z = x + y \cdot i$$
$$z' = x' + y' \cdot i$$

Somma

Cartesiana	$z + z' = (x + x') + (y + y') \cdot i$
Trigonometrica	$z + z' = \rho(\cos\theta + i \cdot sen\theta) + \rho'(\cos\theta' + i \cdot sen\theta')$
Esponenziale	$z + z' = \rho \cdot e^{i\cdot\theta} + \rho' \cdot e^{i\cdot\theta'}$

Sottrazione

Cartesiana	$z - z' = (x - x') + (y - y') \cdot i$
Trigonometrica	$z - z' = \rho(\cos\theta + i \cdot sen\theta) - \rho'(\cos\theta' + i \cdot sen\theta')$
Esponenziale	$z - z' = \rho \cdot e^{i\cdot\theta} - \rho' \cdot e^{i\cdot\theta'}$

Moltiplicazione

Cartesiana	$z \cdot z' = (x + y \cdot i) \cdot (x' + y' \cdot i)$
Trigonometrica	$z \cdot z' = \rho \cdot \rho' \cdot [\cos(\theta + \theta') + i \cdot sen(\theta + \theta')]$
Esponenziale	$z \cdot z' = \rho \cdot \rho' \cdot e^{i\cdot(\theta+\theta')}$

Divisione

Cartesiana	Metodo A: $\frac{z}{z'} = z \cdot \frac{1}{z'} = z \cdot \frac{\overline{z'}}{\lvert z' \rvert^2}$ Metodo B: $\frac{z}{z'} = \frac{z}{z'} \cdot \frac{\overline{z'}}{\overline{z'}}$ (Razionalizzazione)
Trigonometrica	$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} \cdot [\cos(\theta - \theta') + i \cdot sen(\theta - \theta')]$
Esponenziale	$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} \cdot e^{i\cdot(\theta-\theta')}$

Elevamento a potenza

Cartesiana	$z^n = (x + y \cdot i)^n$
Trigonometrica	$z^n = \rho^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i \cdot sen(n \cdot \theta)]$
Esponenziale	$z^n = \rho^n \cdot e^{i\cdot n\cdot\theta}$

Radice

Le radici di un numero complesso sono tante quante l'esponente del numero complesso. Per trovare le varie radici, si fa variare il parametro k:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\theta}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\theta}{n}\right)\right]$$

per k=0, 2, 3, ..., n-1

Logaritmo

$\log_e z = \log_e(\rho) + i \cdot (\theta + 2k\pi) \quad \Rightarrow \quad$ Esistono infiniti logaritmi.

Logaritmo principale: $-\pi \leq \theta \leq \pi$ per convenzione

Equazioni complesse

Per risolvere le equazioni con i numeri complessi si possono seguire due metodi, il metodo tradizionale e il metodo per sostituzione.

A) Metodo tradizionale
Si risolve l'equazione con i tradizionali metodi, e quando si ottiene $\sqrt{-1}$ si sostituisce i. Per spiegare il concetto è utile un esempio:

$$z^2 + 4z + 5 = 0$$

Si utilizza la normale formula risolutiva:

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-5}}{1} = -2 \pm i$$

$$z_1 = -2 + i \quad \text{V} \quad z_2 = -2 - i$$

B) Metodo per sostituzione
1) Nell'equazione si applica la sostituzione: $z = x + i \cdot y$
2) Si svolgono i conti
3) Si raccolgono i termini reali e i termini immaginari, in modo da ottenere la forma: $A + B \cdot i = 0$
4) Si risolve il sistema $\left\{ \begin{matrix} A = 0 \\ B = 0 \end{matrix} \right\}$, perchè un numero complesso è nullo quando sono nulli sia la parte reale che la parte immaginaria.
   Nota Bene: Il sistema ha come variabili i coefficienti x e y della parte immaginaria e della parte reale di z. Poichè i coefficienti x e y sono reali per definizione, il sistema può avere solo soluzioni reali, e non immaginarie.
5) Le coppie $\left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\}$ risultato del sistema sono i valori dei coefficienti della parte reale e immaginaria delle soluzioni complesse dell'equazione.

<u>Esempio</u>:

$$z^2 + 4z + 5 = 0$$

Applico la sostituzione:

$$(x + y \cdot i)^2 + 4(x + i \cdot y) + 5 = 0$$

Svolgo e raccolgo:

$$(x^2 - y^2 + 4x + 5) + i \cdot (2xy + 4y) = 0$$

Risolvo il sistema:

$$\left\{ \begin{matrix} x^2 - y^2 + 4x + 5 = 0 \\ 2xy + 4y = 0 \end{matrix} \right\}$$

Il sistema si divide in due sottosistemi:

M: $\left\{ \begin{matrix} x = -2 \\ y^2 - 1 = 0 \end{matrix} \right\}$ → Il primo sistema ha soluzioni reali, che risultano: $\left\{ \begin{matrix} x_1 = -2 \\ y_1 = -1 \end{matrix} \right\} V \left\{ \begin{matrix} x_2 = -2 \\ y_2 = +1 \end{matrix} \right\}$

N: $\left\{ \begin{matrix} y = 0 \\ x^2 + 4x + 5 = 0 \end{matrix} \right\}$ → Il secondo sistema ha soluzioni complesse, e non è quindi accettabile.

Le soluzioni dell'equazione sono quindi date dalle soluzioni di M:

$$z_1 = -2 - 1 \cdot i$$
$$z_2 = -2 + 1 \cdot i$$