

Logaritmi

Definizione: il logaritmo in base a di un numero n è l'esponente da dare alla base a per ottenere il numero n.

$$\log_a n = p \Leftrightarrow a^p = n$$

Condizioni: 1) Base positiva e diversa da 1: $a > 0, a \neq 1$
2) Argomento positivo: $n > 0$

Proprietà

$$a^{\log_a n} = n$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

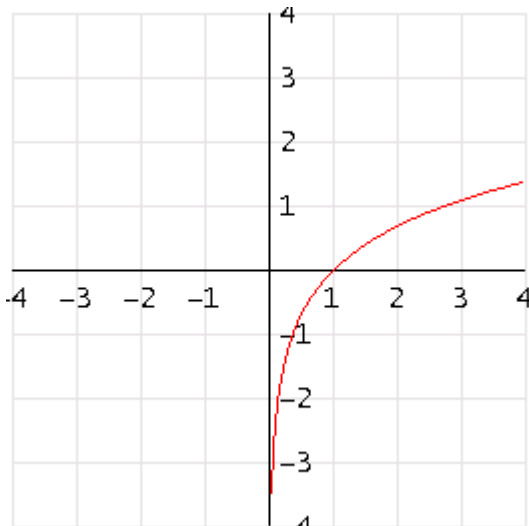
Prodotto di due argomenti: $\log_a(n \cdot m) = \log_a(n) + \log_a(m)$

Quoziente di due argomenti: $\log_a(n \cdot m) = \log_a(n) - \log_a(m)$ $\log_a \frac{1}{n} = -\log(n)$

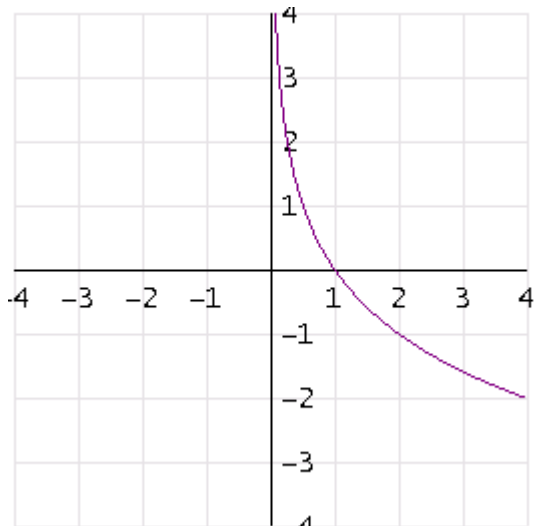
Elevazione a potenza dell'argomento: $\log_a n^k = k \cdot \log_a n$

Cambio di base: $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$ $\log_{base}(\text{argom. vecchio}) = \frac{\log_{nuova\ base}(\text{argom. vecchio})}{\log_{nuova\ base}(\text{vecchia base})}$

Grafici



$y = \log_a x$
Base: $a > 1$



$y = \log_a x$
Base: $0 < a < 1$

Equazioni con i logaritmi

Tipo a: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log_a[f(x)] = \log_a[g(x)]$

Tipo b: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$

Condizioni: $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$

$f(x)$ e $g(x)$ non contengono somme o sottrazioni, solo moltiplicazioni e divisioni

Disequazioni con il logaritmi

Tipo a: Se $a > 1$ $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \log_a[f(x)] \geq \log_a[g(x)]$ Il verso resta uguale

Se $0 < a < 1$ $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \log_a[f(x)] \leq \log_a[g(x)]$ Il verso è opposto

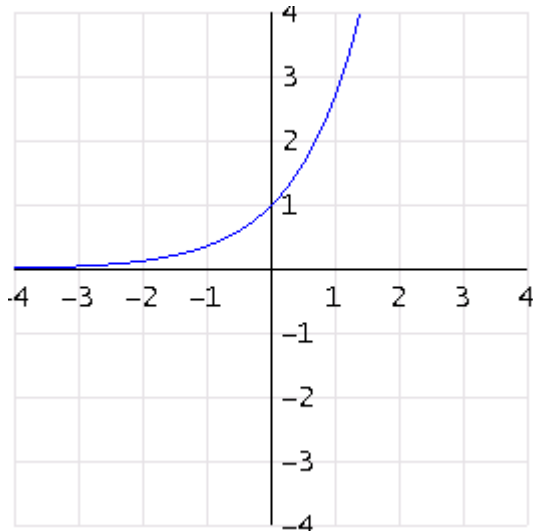
Tipo b: Se $a > 1$ $f(x) \geq a^p \Leftrightarrow \log_a[f(x)] \geq p$ Il verso resta uguale

Se $0 < a < 1$ $f(x) \geq a^p \Leftrightarrow \log_a[f(x)] \leq p$ Il verso è opposto

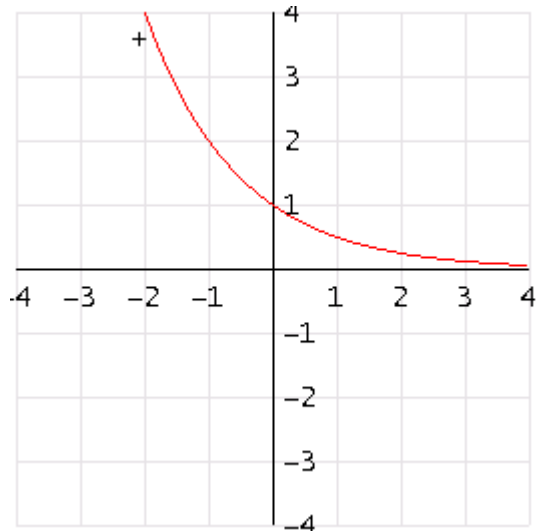
Condizioni: $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$

$f(x)$ e $g(x)$ non contengono somme o sottrazioni, solo moltiplicazioni e divisioni

Esponenziali



$y = a^x$
Base: $a > 1$



$y = a^x$
Base: $0 < a < 1$

Proprietà

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$(\sqrt[y]{a})^x = \sqrt[y]{a^x}$$

Equazioni esponenziali

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Condizione: $a > 0, a \neq 1$

Disequazioni

Se $a > 1$ $a^{r(x)} \geq a^{s(x)} \Leftrightarrow r(x) \geq s(x)$ → Il verso è opposto

Se $0 < a < 1$ $a^{r(x)} \geq a^{s(x)} \Leftrightarrow r(x) \leq s(x)$ → Il verso resta uguale

Esponenti non interi e negativi

Esponenti non interi: $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

Esempio: $a^{0,25} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$ con $a > 0$

Basi negative: $(-a)^x = (-1)^x \cdot a^x$

Esempio: $(-x)^{0,25} = (-x)^{\frac{1}{4}} = (-1)^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = \sqrt{j} \cdot \sqrt[4]{x}$ con $a > 0$