Trasformata zeta

Definizione

La trasformata zeta può essere vista come l'analogo della trasformata di Laplace nel casi di segnali a tempo discreto.

$$Z[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k}$$

Dove: k = variabile temporale discreta, cioè $k \in \mathbb{N}$

x(k) = Segnale a tempo discreto

z = numero complesso, cioè $z \in \mathbb{C}$

Convergenza

Poichè deriva da una serie esponenziale complessa, la trasformata zeta, analogamente alla trasformata di Laplace, non esiste per qualsiasi valore della sua variabile z, ma solo all'interno del semipiano o piano di convergenza della serie, che generalmente è un area circolare nell'intorno dell'origine. La regione di convergenza è definita da due raggi (r_1 più esterno, r_2 più interno), all'interno dei quali deve essere compreso il valore assoluto di z:

$$RDC = \{z \,|\, r_1 \le |z| \le r_2\}$$

Antitrasformata zeta

a) Formula generale:

$$x(k) = \oint X(k) \cdot z^{k-1} dz$$

Dove: x(k) = antitrasformata zeta

X(k) = trasformata zeta

z = numero complesso

$\oint$ = integrale su un percorso chiuso antiorario comprendente l'origine e contenuto nella regione di convergenza della trasformata X(k)

b) Metodo dei fratti semplici:

Se la trasformata zeta è formata solo da fratti semplici, si può utilizzare un metodo molto simile a quello per la trasformata di Laplace:

a) Si crea la funzione ausiliaria, in modo da ottenere fratti semplici adatti a essere antitrasformati immediatamente:

$$X_A(z) = \frac{X(z)}{z}$$

b) Si riduce in fratti semplici la funzione ausiliaria, seguendo il metodo A-B-C o il metodo dei residui

$$X_A(k) = \frac{\alpha}{z \pm \beta} + \ldots + \frac{\gamma}{(z \pm \theta)^m} + \ldots$$

c) Si sostituisce alla funzione ausiliaria la funzione originale:

$$X_A(z) = \frac{X(z)}{z} \quad \to \quad \frac{X(z)}{z} = \frac{\alpha}{z \pm \beta} + \ldots + \frac{\gamma}{(z \pm \theta)^m} + \ldots \quad \to \quad X(z) = \frac{\alpha \cdot z}{z \pm \beta} + \ldots + \frac{\gamma \cdot z}{(z \pm \theta)^m} + \ldots$$

d) Si antitrasforma leggendo direttamente la tabella delle antitrasformate.

Trasformate zeta notevoli e proprietà

Funzione	Trasformata zeta	Regione di convergenza
$\delta(k)$	1	qualunque valore
$\delta(k-a)$	$\frac{1}{z^a}$	qualunque valore
$u(k)$ o 1	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\|>1$
k	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\|>1$
a^k	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$
$k*a^k$	$\frac{a\cdot z}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$\binom{k}{n-1}\cdot a^{k-(n-1)}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	?
$\text{sen}(k\cdot\omega t)$	$-\frac{z\cdot sen(\omega)}{2\cdot z\cdot\cos(\omega)-z^2-1}$	$\|z\|>1$
$\cos(k\cdot\omega t)$	$\frac{z\cdot\cos(\omega)-z^2}{2\cdot z\cdot\cos(\omega)-z^2-1}$	$\|z\|>1$
$a^k\cdot\text{sen}(k\cdot\omega t)$	$\frac{a\cdot z\cdot sen(\omega t)}{z^2-2\cdot a\cdot z\cdot\cos(\omega t)+a^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$a^k\cdot\cos(k\cdot\omega t)$	$\frac{z^2-a\cdot z\cdot sen(\omega t)}{z^2-2\cdot a\cdot z\cdot\cos(\omega t)+a^2}$	$\|z\|>\|a\|$

Proprietà	Funzione	Trasformata zeta	Regione di convergenza (RDC)
Linearità	$a\cdot x_1(k)+b\cdot x_2(k)$	$a\cdot X_1(z)+b\cdot X_2(z)$	Almeno l'intersezione delle due RCD
Ritardo temporale	$x(k-a)$ a>0	$z^{-a}\cdot X(z)$	RDC, ad eccezione di z=0
Anticipo unitario	$x(k+1)$	$z\cdot X(z)-z\cdot x(0)$	RDC, ad eccezione di $z=\infty$
Anticipo temporale	$x(k+a)$ a>0	$z^{-a}\cdot X(z)-\sum_{k=0}^{a-1}x(k)\cdot z^{a-k}$	RDC, ad eccezione di $z=\infty$
Prodotto per a^k	$a^k\cdot x(k)$	$X(z/a)$	$\|a\|\cdot r_2<\|z\|<\|a\|\cdot r_1$
Prodotto per k	$k\cdot x(k)$	$-z\cdot X(z)'$	RDC
Inverso nel tempo	$x(-k)$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$\frac{1}{r_1}<\|z\|<\frac{1}{r_2}$
Convoluzione	$x(k)*y(k)$	$X(k)\cdot Y(k)$	Almeno l'intersezione delle due rdc
Coniugato	x*(k)	X*(z*)	RDC
Parte reale	$\text{Re}[x(k)]$	$\frac{1}{2}\cdot[X(z)+X^*(z^*)]$	RDC
Parte immaginaria	$\text{Im}[x(k)]$	$\frac{1}{2j}\cdot[X(z-X^*(z^*)]$	RDC
Teorema del valore finale	$\lim_{k\to\infty}x(k)$	$\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot X(z)$ Se $(z-1)\cdot X(z)$ non ha poli per $\|z\|\geq 1$	/
Teorema del valore iniziale	x(0)	$\lim_{z\to\infty}X(z)$ Se il limite esiste finito, cioè $\neq\infty$	/