Trasformata di Laplace unilatera
Teoria

Definizione

$$L[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-(s\cdot t)}\ dt = F(s)$$

Dove: f(t) = funzione reale trasformabile. E' nulla per t<0.
t = variabile indipendente reale della funzione reale f(t)
F(s) = trasformata di Laplace della funzione f(t)
s = variabile indipendente complessa della trasformata di Laplace

Di fatto, la trasformata di Laplace è un operatore che trasforma una funzione reale di t (ad esempio l'equazione di un'onda) in una funzione complessa di s (ad esempio l'equazione di una risposta in frequenza).

$$f(t) \in \mathbb{R} \;\rightarrow\; F(s) \in \mathbb{C}$$

Esistenza e dominio della trasformata

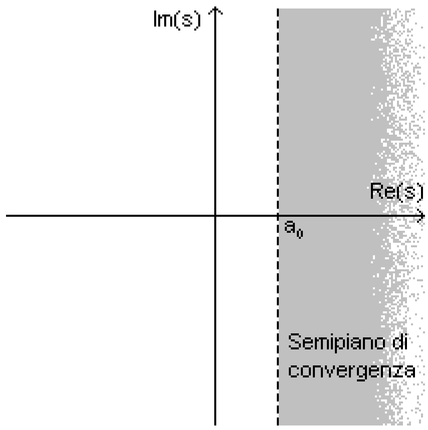
La trasformata è definita attraverso un integrale improprio. La sua La condizione di esistenza è quindi:

Integrale improprio converge $\Rightarrow$ Trasformata di Laplace esiste
Integrale improprio diverge $\Rightarrow$ Trasformata di Laplace non esiste

Siccome l'integrale improprio ha un parametro complesso s, ogni volta che si calcola la trasformata di Laplace bisogna discutere per quali valori di s l'integrale converge, e per quali valori diverge. Si dimostra che (il paragrafo "Convergenza di e^{-st}" ne da una prova) ciò che conta per la convergenza dell'integrale di Laplace è la parte reale di s. In particolare, si troverà sempre che

$$\mathrm{Re}(s) > a_0 \;\Rightarrow\; \text{Integrale di Laplace converge}$$

Questa condizione crea di fatto un "semipiano di convergenza", nel quale la trasformata di Laplace esiste. Bisognerebbe sempre discutere l'esistenza di questo semipiano, che invece spesso è data, per semplicità, valida.



Piano complesso con il semipiano di convergenza dell'esponenziale complesso

Esistono anche funzioni che hanno , cioè per le quali non esiste trasformata di Laplace. Un esempio è la funzione:

$$f(x) = e^{t^2}$$

Verifica della convergenza

Esistono tre modi per verificare che una funzione sia trasformabile secondo Laplace:
1) Calcolare direttamente la trasformata con l'integrale di definizione, e discutere il parametro s.
2) Dimostrare che l'integrale improprio non converge, senza calcolarlo. A questo scopo, è utile questa scomposizione:

$$e^{-s\cdot t}\cdot f(x) \;\rightarrow\; e^{-(a+j\cdot b)}\cdot f(x) \;\rightarrow\; e^{-a}\cdot f(x)\cdot[e^{-b\cdot j}] \;\rightarrow\; e^{-a}\cdot f(x)\cdot[\cos(b)+j\cdot \mathrm{sen}(b)]$$

Quindi:

$$\int_{0^-}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-(s\cdot t)}\ dt \;=\; \int_{0^-}^{+\infty} e^{-a}\cdot f(x)\cdot\cos(b) + j\cdot\int_{0^-}^{+\infty} e^{-a}\cdot f(x)\cdot \mathrm{sen}(b)$$

Mediante questa scomposizione, abbiamo ottenuto due integrali a valori reali. Se si prova che questi integrali convergono, si dimostra che la trasformata di f(x) esiste.

NOTA: anche in questo caso, si evidenzia come Re(s), cioè a, sia il valore che determina la convergenza o meno dell'integrale. Im(s), cioè b, compare solo nel seno e nel coseno, e determina solo un oscillamento dell'integrale tra 1 e -1.

3) Verificare che:

$$|F(x)| \le M\cdot e^{n\cdot t} \text{ con } \forall\ t > 0, \text{ n e m reali e positivi}$$

Convergenza di e^{-st}
Vogliamo determinare il comportamento della funzione:

$$e^{-st} \quad \text{con} \quad s \in \mathbb{C}$$

quando t tende a . Bisogna quindi studiare il comportamento della funzione in base al variare del parametro s. Siccome s è un numero complesso, la funzione può essere riscritta sotto forma di un numero complesso:

$$e^{\cdot st} = e^{-(a+jb)\cdot t} = e^{-at} \cdot e^{j\cdot(bt)}$$

Modulo: e^{-at}
/
$e^{-at} \cdot e^{j\cdot(-bt)}$
\
Fase: $e^{j\cdot(-bt)}$

Studio ora il comportamento di s al variare del suo modulo e della sua fase

<u>Fase b</u>
La fase del numero complesso è ininfluente per determinare il suo comportamento a $+\infty$. Infatti

$e^{j\cdot(-bt)} \rightarrow$ numero complesso di modulo 1 e fase (-bt).

Al tendere all'infinito dell'angolo di fase, cioè di (-bt), il numero complesso continua a ruotare sulla circonferenza di raggio unitario.

$\Rightarrow$ Il termine b è ininfluente per determinare la convergenza dell'esponenziale a $+\infty$

<u>Modulo a</u>
Il modulo dell'esponenziale complesso è determinante per deciderne la convergenza. Possiamo distinguere tre casi:

a > 0 $\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} e^{-at} \cdot e^{j\cdot(-bt)} = 0 \cdot e^{j\cdot(-bt)} \quad \rightarrow$ Num. complesso di fase variabile e modulo nullo
L'esponenziale converge

a = 0 $\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} e^{-at} \cdot e^{j\cdot(-bt)} = e^{j\cdot(-bt)} \quad \rightarrow$ Num.complesso di fase variabile e modulo unitario
L'esponenziale oscilla su una circonferenza unitaria

a < 0 $\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} e^{-at} \cdot e^{j\cdot(-bt)} = \infty \cdot e^{j\cdot(-bt)} \quad \rightarrow$ Num. complesso di fase variabile e modulo infinito
L'esponenziale diverge

Principali trasformate

Funzione f(t)	Trasformata F(s)	Ascissa di convergenza
$\delta(t)$ Delta di Dirac	1	$s \in \mathbb{C}$
1 u(t) - Gradino	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}(s) > 0$
t^n con $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}(s) > 0$
$e^{a\cdot t}$ $a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-a}$	$\text{Re}(s) > \text{Re}(a)$
$sen(\omega \cdot t)$ $\omega > 0$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\cos(\omega \cdot t)$ $\omega > 0$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$sen(\omega \cdot t + \theta)$	$\frac{s\cdot sen(\theta)+\omega\cdot\cos(\theta)}{s^2+\omega^2}$	
$\cos(\omega \cdot t + \theta)$	$\frac{s\cdot\cos(\theta)-\omega\cdot sen(\theta)}{s^2+\omega^2}$	

Proprietà della trasformata di Laplace

Proprietà	**Formula**		**Ascissa k di convergenza**
Unicità	$f_1(t) = f_2(t)$	$F_1(t) = F_2(t)$	k
Moltiplicazione per costante	$k \cdot f(t)$	$k \cdot F(s)$	k
Somma	$f_1(t) + f_2(t)$	$F_1(s) + F_2(s)$	$\max(k_1, k_2)$
Traslazione nel campo t	$u(t-a) \cdot f(t-a)$ $a \in \mathbb{R}^+$	$e^{-s \cdot a} \cdot F(s)$	k
Traslazione nel campo s	$e^{a \cdot t} \cdot f(t)$ $a \in \mathbb{C}$	$F(s-a)$	k+Re(a)
Derivazione rispetto a t	$f(t)^{(n)}$	$s^n \cdot F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} \cdot f(0)^{(k-1)}$ Esempio: $s^3 \cdot F(x) - s^2 \cdot f(0) - s \cdot f'(0) - f''(0)$	$\max(k_n, 0)$
Integrazione	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$	max(k,0)
Prodotto di convoluzione	$f(t) * g(t) = \int_0^x f(x) \cdot g(x-t)dt$ $f(t) * g(t) = \int_0^x f(x-t) \cdot g(t)dt$	$F(s) \cdot G(s)$	$\max(k_1, k_2)$
Derivata della trasformata	$-t \cdot f(t) =$ $(-1)^n \cdot x^n \cdot f(x) =$	$F(s)^{(1)}$ $F(s)^{(n)}$	k
Integrazione	$\frac{f(x)}{x}$	$\int_s^{+\infty} F(u)du$	k di $\frac{f(x)}{x}$
Funzioni periodiche	$F(s)$ periodica	$F_0(s) \cdot \frac{1}{1 - e^{-s \cdot T}}$ F_0 = Trasformata della funzione base periodica T = periodo della funzione	0
Teorema del valore iniziale	$\lim_{t \to 0+} f(t)$ $\lim_{t \to 0-} f(t)$	$\lim_{s \to +\infty} s \cdot F(s)$ $\lim_{s \to -\infty} s \cdot F(s)$ Il teorema del valore iniziale vale se e solo se esiste il limite di f(x).	\
Teorema del valore finale	$\lim_{t \to \infty} f(t)$	$\lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$ Il teorema del valore finale esiste se e solo se esiste il limite di f(x).	\
Scalamento	$f(a \cdot t)$ $a > 0$	$\frac{1}{a} \cdot F(\frac{s}{a})$	$c \cdot k$

Nota: il k specificato nella colonna delle ascisse di convergenza è il k che si avrebbe se si facesse la trasformata della sola funzione in esame f(x).

Unità di misura
Se si applica la trasformata di Laplace nel campo dei segnali, bisogna considerare anche la dimensione fisica delle variabili:

Funzione	**Dominio**	**Unità di misura**
primitiva f(t)	tempo	t $\rightarrow$secondi
trasformata F(s)	frequenza	s $\rightarrow$ hertz

AntiTrasformata di Laplace

Poichè le trasformate sono univoche, per antitrasformare è sufficiente applicare le leggi di trasformazione al contrario. Se le funzioni sono particlarmente complesse, si puo applicare la formula generale, che però è molto complessa, oppure ricorrere a metodi particolari, come nel caso delle funzioni razionali fratte.

Formula generale

La formula di Riemann-Fourier permette di antitrasformare qualunque F(x), ma implica l'esecuzione di un integrale complicato:

$$\frac{1}{2\pi j}\cdot \text{v.p.}\int_{a-\infty\cdot j}^{a+\infty\cdot j} e^{st}\cdot F(s)ds$$

Ipotesi: f(x) regolare a tratti
F(s) = L[f(x)]
k ascissa di convergenza fi F(s)
$a > k$

Funzioni razionali fratte

Le funzioni razionali fratte sono l'unico tipo trasformata di Laplace che può comparire nei circuiti elettronici. Per questo è necessario imparare questo il processo di antitrasformazione.
Il procedimento è questo:

1) Si scompone la funzione razionale fratta in fratti semplici

2) Si antitrasfroma, utilizzando di volta in volta il metodo più approriato:
   a) Regole di trasformazione al contrario
   b) Formule: *Poli semplici*: $\frac{r}{s-a} \rightarrow r\cdot e^{at}$
   Poli multipli: $\frac{r}{(s-a)^k} \rightarrow \frac{r}{(k-1)!}\cdot t^{k-1}\cdot e^{at}$
   Poli complessi coniugati: vedi di seguito

Antitrasformazione di poli complessi
Se antitrasformati con i metodi normali, i poli complessi danno origine a antitrasformate con esponenziali complessi. In realtà, semplificando con le formule trigonometriche di Eulero, si ottengono sempre antitrasformate reali. Si possono seguire due vie per avere una antitrasformata reale:
a) Si antitrasforma con le regole normali, e poi si applicano le formule di Eulero
b) Si applica una formula, ricordando che, scomponendo in fattori il denominatore, i poli complessi ottenuti sono sempre coniugati tra loro:

$$F(s)=\frac{|A|\cdot e^{j\cdot\theta}}{s-(a+b\cdot j)}+\frac{|A|\cdot e^{-j\cdot\theta}}{s-(a-b\cdot j)} \quad \rightarrow \quad f(t)=2|A|\cdot e^{a\cdot t}\cdot u(t)\cdot\cos(b\cdot t+\theta)$$

Nota pratica: analizzando i circuiti elettronici, la parte reale del polo deve esser positiva per aver stabilità. In tal caso per applicare la precedente formula parte reale, parte immaginaria, fase e modulo sono riferiti al polo che, con davanti il meno raccolto, è positivo:

$$2\cdot\begin{pmatrix}\text{Modulo } \rho \\ \text{del residuo}\end{pmatrix}\cdot e^{t\cdot\text{Re(polo)}}\cdot\cos\left[\text{Im(polo)}+\begin{pmatrix}\text{Fase } \theta \\ \text{del residuo}\end{pmatrix}\right]$$

$s-(a+b\cdot j) \rightarrow$ Considerato
/
$s-(a\pm b\cdot j)$
\
$s-(a-b\cdot j) \rightarrow$ Non considetato

Esempio di applicazione delle formule di Eulero

Per chiarire come si applicano le formule di Eulero per semplificare antitrasformate complesse si riporta la dimostrazione della formula di antitrasformazione di poli complessi semplici.

Applicando la formula dei residui, si ottiene anche al numeratore una coppia di zeri complessi coniugati:

$$F(s) = \frac{x + y \cdot j}{s - (a + b \cdot j)} + \frac{x - y \cdot j}{s - (a - b \cdot j)}$$

Dove: $x \pm y \cdot j$ = coppia di zeri complessi coniugati

$a \pm b \cdot j$ = coppia di poli complessi coniugati

Esprimendo gli zeri complessi in forma polare, si ottiene:

$$F(s) = \frac{|A| \cdot e^{j \cdot \theta}}{s - (a + b \cdot j)} + \frac{|A| \cdot e^{-j \cdot \theta}}{s - (a - b \cdot j)}$$

Antitrasformando, il numeratore resta invariato, perchè è un coefficiente, mentre il denominatore risulta essere una traslazione:

$$f(t) = [|A| \cdot e^{j \cdot \theta}] \cdot [u(t) \cdot e^{(a + b \cdot j) \cdot t}] \; + \; [|A| \cdot e^{-j \cdot \theta}] \cdot [u(t) \cdot e^{(a - b \cdot j) \cdot t}]$$

Raccogliendo $u(t) \cdot e^{a \cdot t}$, si ha che:

$$f(t) = |A| \cdot e^{a \cdot t} \cdot u(t) \cdot [e^{j \cdot (b \cdot t + \theta)} + e^{-j \cdot (b \cdot t + \theta)}]$$

Ricordando la formula di Eulero:

$$e^{j \cdot \theta} = \cos\theta + j \cdot sen\theta$$

Si può scrivere che:

$$|A| \cdot e^{a \cdot t} \cdot u(t) \cdot [\cos(bt + \theta) + sen(bt + \theta) \cdot i + \cos(-bt - \theta) + i \cdot sen(-bt - \theta)]$$

Ricordando che:

$$sen(-x) = -sen(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x)$$

Si può scrivere che:

$$|A| \cdot e^{a \cdot t} \cdot u(t) \cdot [\cos(bt + \theta) + sen(bt + \theta) \cdot i + \cos(+bt + \theta) - i \cdot sen(bt + \theta)]$$

E quindi alla fine si ottiene:

$$f(t) = 2|A| \cdot e^{a \cdot t} \cdot u(t) \cdot \cos(b \cdot t + \theta)$$