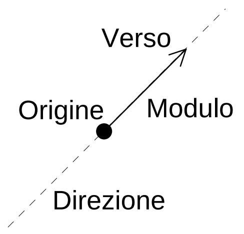
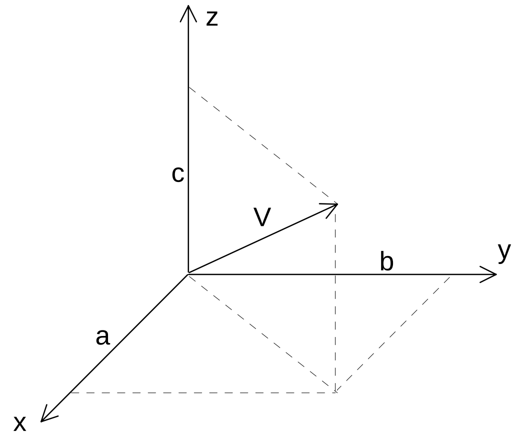
Vettori - Definizione



Forma geometrica



Forma analitica

Un vettore è un ente geometrico definito da:
- Direzione: retta sulla quale giace il vettore, che ne indica l'orientamento nello spazio
- Verso: indica in quale senso è percorsa la retta dal vettore
- Modulo o intensità: numero relativo che indica quanto è lungo il vettore
- Origine: punto nel quale il vettore ha origine

Forma di rappresentazione:

a) Geometrica

Nome: $\overrightarrow{OA}$ Segmento orientato, del quale O è la coda, e A la punta (Fig.1)

Scrittura: vengono indicate separatamente le tre caratteristiche del vettore: direzione, modulo, verso, origine

b) Analitica

Nome: **v** lettera minuscola in grassetto (Fig.2)

Scrittura: il vettore viene visto come un segmento, la cui coda è puntata nell'origine, e la punta nel punto P(a,b,c) dello spazio cartesiano. Vengono indicate le componenti del vettore rispetto ai tre versori fondamentali dello spazio. Questi versori possono anche essere sottointesi:

$$w = a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$$
$$w = (a_1, a_2, a_3)$$

c) Forma matriciale:

Un vettore può anche essere scritto come matrice con una riga e tre colonne, inserendo le componenti del vettore:

$$w = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Spazio vettoriale e versori

Combinazione lineare: insieme di vettori moltiplicati per un coefficiente, che sommati tra loro danno origine a un altro vettore:

$$k = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 \ldots \alpha_n \cdot v_n$$

dove: α_n = coefficiente del vettore n
v_n = vettore n della combinazione

Vettori linearmente indipendenti: insieme di vettori dei quali nessuno è combinazione lineare degli altri

Proprietà: - In uno spazio $\mathbb{R}^n$ esistono al massimo n vettori linearmente indipendenti.
- In uno spazio $\mathbb{R}^n$, per descrivere un vettore w qualsiasi come combinazione lineare di versori, sono necessari n versori.

Versore: *definizione*: vettore di modulo unitario.

significato: il versore è un vettore che indica la direzione e il verso di un vettore con modulo qualsiasi

formula: dato un vettore **v** qualsiasi, il rispettivo versore si ottiene con la seguente formula:

$$vers(v) = \frac{v}{|v|}$$

Versori fondamentali dello spazio: i versori fondamentali dello spazio sono i tre versori, linearmente indipendenti tra loro, che combinati linearmente nello spazio danno origine a ogni altro possibile vettore dello spazio. Corrispondono ai 3 assi fondamentali:

$i=(1,0,0) \rightarrow$ Asse x
$j=(0,1,0) \rightarrow$ Asse y
$k=(0,0,1) \rightarrow$ Asse z

Vettore passante per due punti

Dati: $O=(x_o, y_o, z_o) \rightarrow$ Origine
$P=(x_p, y_p, z_p) \rightarrow$ Punta
Risultato: $w=(x_p-x_o, y_p-y_o, z_p-z_o)$

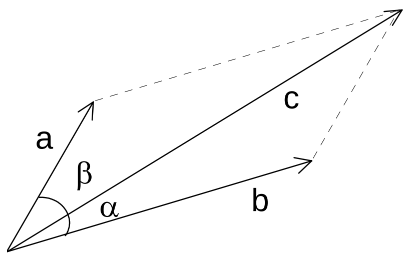
Modulo del vettore a in forma analitica: $a=\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}$

Operazioni con i vettori

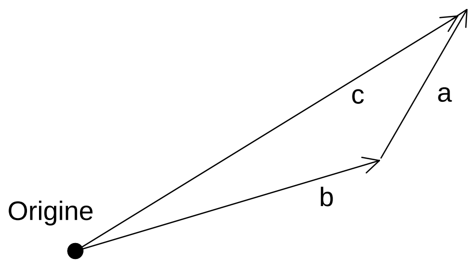
Sono dati i seguenti vettori:

$$a=(a_1, a_2, a_3)$$
$$b=(b_1, b_2, b_3)$$
$$c=(c_1, c_2, c_3)$$

Somma e differenza



Metodo del parallelogrammmo



Metodo testa-coda

E' data la seguente operazione tra vettori:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$$

Vettore somma c: *Origine:* **c** ha la stessa origine di **a** e **b**
Modulo, verso, direzione: sono determinati dalla regola del parallelogramma. **c** è la diagonale del parallelogramma che ha come lati **a** e **b**
Piano di giacenza: **c** è un vettore che giace nello stesso piano di **a** e **b**

Forma analitica: $a+b=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$
Forma matriciale: $a+b=\left| a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \right| + \left| b_1 \;\; b_2 \;\; b_3 \right|$
Significato grafico: $\alpha<90^o \rightarrow$ diagonale maggiore del parallelogramma con lati i vettori **a** e **b**
$\alpha<90^o \rightarrow$ diagonale minore del parallelogramma con lati i vettori **a** e **b**

Proprietà: a) Associativa: $(a+b)+c=a+(b+c)$
b) Commutativa: $u+v=v+u$
c) Elemento neutro: $v+0=v$

Vettore differenza c: si calcola esattamente come se fosse una somma, sostituendo al secondo addendo il suo opposto:

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{c}$$
$$\mathbf{a}+(-\mathbf{b})=\mathbf{c}$$

Vettore opposto

Vettore -**a** opposto di **a**: - Direzione:stessa
- Modulo: stesso
- Verso: opposto
- Origine: stessa

Un vettore con modulo negativo è uguale all'opposto dello stesso vettore con modulo positivo

$$(a \text{ con } |a| < 0) = (-a \text{ con } |a| > 0)$$

Significato grafico: vettore con verso opposto a **a**
Forma analitica: $-a = (-a_1, -a_2, -a_3)$
forma matriciale: $-a = (-1) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$

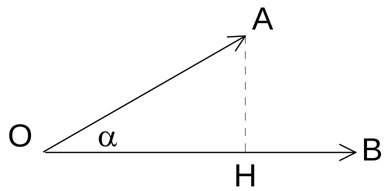
Prodotto di un vettore per uno scalare

E' data la seguente operazione, dove **a** e **b** sono vettori e α un numero reale:

$$b = \alpha \cdot a$$

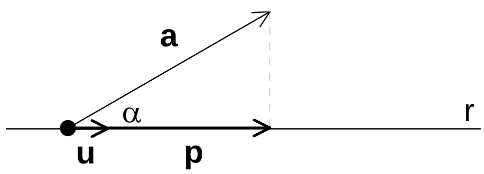
Vettore b risultato: il risultato dell'operazione è un vettore con stesso verso, direzione, origine e piano di giacenza. Il modulo è moltiplicato per lo scalare.
Significato grafico: allungare o accorciare la lunghezza del vettore
Forma analitica: $b = \alpha \cdot a = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3)$
Forma matriciale: $\alpha \cdot a = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$
Proprietà: gode delle stesse proprietà del prodotto normale

Prodotto scalare



Scrittura: $n = a \cdot b$
Lettura: a scalare b
Formula: $n = |a| \cdot |b| \cos \alpha$
Dove: n = numero reale risultato del prodotto scalare
a,b = vettori
β = angolo tra i due vettori
Significato grafico: Il prodotto scalare è l'area del rettangolo che ha per lati un vettore e la proiezione dell'altro vettore sul primo.
Forma analitica: $n = a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$
Forma matriciale: $a \cdot b = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$

Componente vettoriale

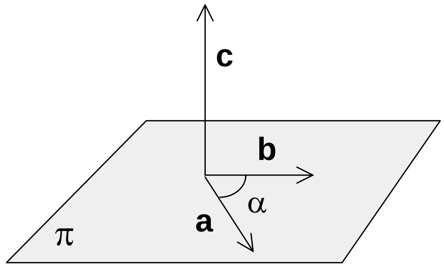


Si definisce componente del vettore **a** sulla retta r il vettore **p** risultato dalla proiezione del vettore **a** sulla retta r. Il vettore proiezione si calcola in questo modo

$$(a \cdot u)u$$

Vettore proiezione p: *Modulo:* prodotto scalare tra **a** e il versore della retta **u**
Direzione: direzione del versore **u**, cioè della retta r
Verso: in base al segno del prodotto scalare: + → stesso verso di **u**
- → verso opposto di **u**
Origine: proiezione dell'origine di **a** sulla retta r

Prodotto vettoriale



Il prodotto vettoriale si indica come:

Scrittura: $c = a \times b$

$c = a \wedge b$

Lettura: a vettor b

Vettore risultato c: *Modulo*: $|a| \cdot |b| \cdot sen(\alpha)$

Direzione: perpendicolare al piano π di appartenenza di **a** e **b**

Verso: regola della mano destra (La mano può essere rivolta verso l'alto o verso il basso. Il pollice è alzato. Le altre quattro dita devono ruotare in modo che la loro punta incontri per primo il primo vettore del prodotto vettoriale. Il pollice indica il verso del vettore risultato)

Origine: stessa origine di **a** e **b**

Significato grafico: il modulo del prodotto vettoriale è area del paralellogramma costruito sui vettori **a** e **b**

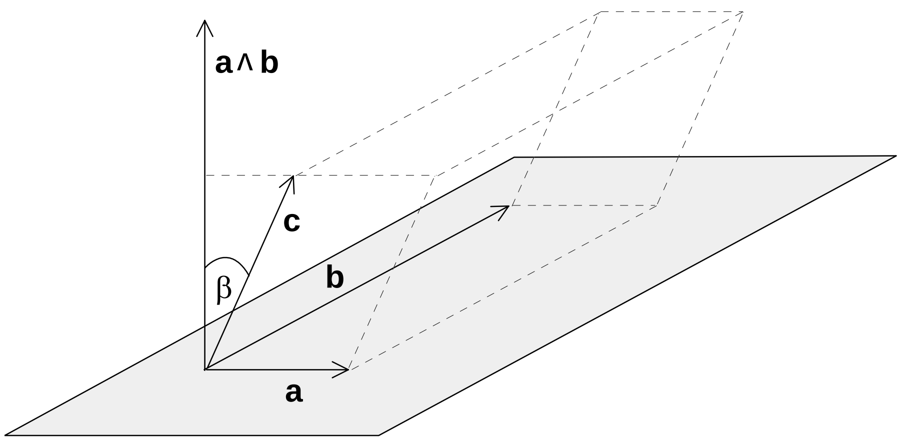
Forma matriciale: $a \wedge b = \det\left(\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\right)$

proprietà: anticommutativa $a \wedge b = -b \wedge a$

distributiva: $a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c$

distriburiva rispetto a uno scalare: $ka \wedge kb = k(a \wedge b)$

Prodotto misto



Scalare n risultato: $n = c \cdot (a \wedge b)$

Per calcolare il prodotto misto, basta applicare le normali regole di calcolo del prodotto scalare e vettoriale.

Significato grafico: il valore assoluto del prodotto misto rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori **a,b,c**.

Forma matriciale: $(a \wedge b) \cdot c = \det\left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right)$

Proprietà: permutazione ciclica: $c \cdot (a \wedge b) = b \cdot (c \wedge a) = a \cdot (b \wedge c)$

Significato grafico dei vettori

Operazione	Significato grafico
Somma	$\alpha < 90^o$ → diagonale maggiore del parallelepipedo con lati i vettori **a** e **b** $\alpha < 90^o$ → diagonale minore del parallelepipedo con lati i vettori **a** e **b**
Opposto	Vettore con verso opposto a **a**
Prodotto per uno scalare	Allungare o accorciare la lunghezza del vettore
Prodotto scalare	Il prodotto scalare è la lunghezza della proiezione di un vettore sull'altro. Nel disegno, a esempio, è la lunghezza di OH, proiezione del vettore OA sul vettore OB.
Prodotto vettoriale	Il modulo del prodotto vettoriale è area del paralellogramma costruito sui vettori **a** e **b**
Prodotto misto	Il valore assoluto del prodotto misto rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettora **a,b,c**.

So $a \perp b \;\Leftrightarrow\; a \cdot b = 0$
a è perpendicolare a **b** se e solo se il loro prodotto scalare è nullo

b) $a \;//\; b \;\Leftrightarrow\; a \wedge b = 0$
a è parallelo a **b** se e solo se il loro prodotto vettoriale è nullo
$a \;//\; b \;\Leftrightarrow\; a = \lambda \cdot b$, dove $\lambda \in \mathbb{R}$ Due vettori sono paralleli se sono combinazione lineare

c) $a, b, c \in \pi \;\Leftrightarrow\; a \cdot b \wedge c = 0$
a,**b** e **c** appartengono allo stesso piano solo se il loro prodotto misto è nullo