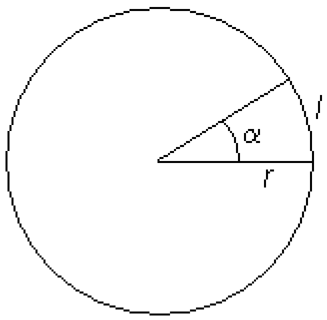
Funzioni trigonometriche

1) Radianti e Gradi:



Definizione:

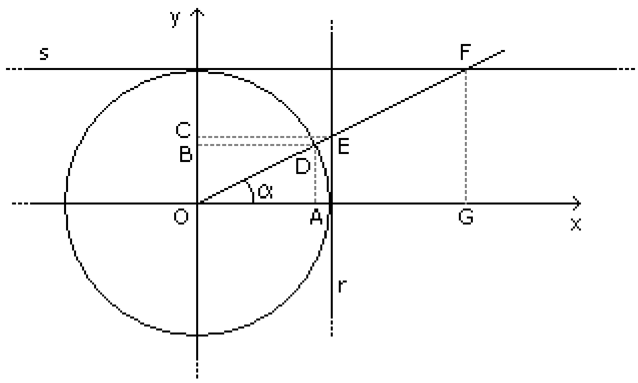
$$rad = \frac{l}{r} = \frac{\text{Lunghezza arco di circonferenza}}{\text{Raggio}}$$

Proporzione *gradi - radianti*:

$$\alpha_{rad} : \pi = \alpha_{grad} : 180$$

Per le corrispondenze tra particolari angoli in radianti e in gradi, vedi la tabella dei valori di *sen-cos-tg*.

2) Circonferenza trigonometrica



E' data una circonferenza di centro *O* nell'origine degli assi e con raggio unitario. Sono date anche una retta *r* tangente alla circonferenza e perpendicolare all'asse delle *x*, e una retta *s* tangente alla circonferenza e perpendicolare all'asse delle *y*.

Funzioni trigonometriche principali:

Seno: $Sen\alpha = \overline{OB} = \overline{DA} = y_D$

Coseno: $Cos\alpha = \overline{OA} = \overline{DB} = x_D$

Tangente: $Tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\overline{OC}$

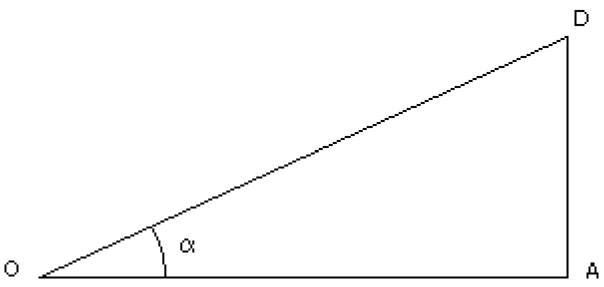
Funzioni reciproche delle funzioni trigonometriche:

CoSecante: $cosec = \frac{1}{\overline{OB}} = \frac{1}{sen\alpha}$

Secante: $\sec\alpha = \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\cos\alpha}$

CoTangente: $\cot g\alpha = \overline{OG} = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$

3) Triangolo



Considerando un triangolo rettangolo qualsiasi, si ha:

$\overline{DA} = \overline{DO} \cdot sen\alpha \Rightarrow sen\alpha = \frac{DA}{DO}$ → cateto = ipotenusa · sen(angolo opposto al cateto)

$\overline{OA} = \overline{DO} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{AO}{DO}$ → cateto = ipotenusa · cos(angolo adiacente al cateto)

$\overline{DA} = \overline{OA} \cdot tg\alpha \Rightarrow tg\alpha = \frac{DA}{OA}$ → cateto = cateto · tg(angolo opposto al cateto)

Nella circonferenza trigonometrica, *O* è il centro degli assi, *OA* è il raggio unitario, che nei rapporti si semplifica, e *D* è l'intersezione del raggio con la circonferenza.

4) Nomi e abbreviazioni

Italiano		Inglese	
Nome	**Abbreviazione**	**Nome**	**Abbreviazione**
Seno	sen	Sine	sin
Coseno	cos	Cosine	cos
Tangente	tg	Tangent	tan
Cosecante	cosec	Cosecant	cosec
Secante	sec	Secant	sec
Cotangente	cotg	Cotangent	cotan

5) Periodi

Funzione	Periodo
Seno	2π
Coseno	2π
Tangente	π
Cosecante	2π
Secante	2π
CoTangente	π

6) Valori di angoli particolari

Rad	Grad	Seno	Coseno	Tangente
0	0°	0	1	0
$\frac{\pi}{12}$	15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	18°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	∞
π	180	0	-1	0
$\frac{3}{2}\pi$	270°	-1	0	∞

I valori delle funzioni trigonometriche di molti altri angoli, come 36°, 72°, 75°, possono essere ottenuti scomponendo questi angoli opportunamente.

Formule trigonometriche

1) Relazione fondamentale della goniometria

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

2) Formule di addizione e sottrazione

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + sen\alpha \cdot sen\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta$$

$$sen(\alpha-\beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot sen\beta$$
$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot sen\beta$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$
$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

3) Formule di duplicazione

$$sen2\alpha = 2 \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$$
$$tg2\alpha = \frac{2 \cdot tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

4) Formule parametriche

$$sen\alpha = \frac{2 \cdot t}{1 + t^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

dove $t = tg\frac{\alpha}{2}$

5) Formule di bisezione

$$sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$
$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha}$$
$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}$$

6) Formule di prostaferesi

$$senp + senq = 2sen\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$senp - senq = 2\cos\frac{p+q}{2}sen\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2sen\frac{p+q}{2} \cdot sen\frac{p-q}{2}$$

7) Formule di Werner

$$sen\alpha \cdot sen\alpha = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$
$$sen\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)]$$

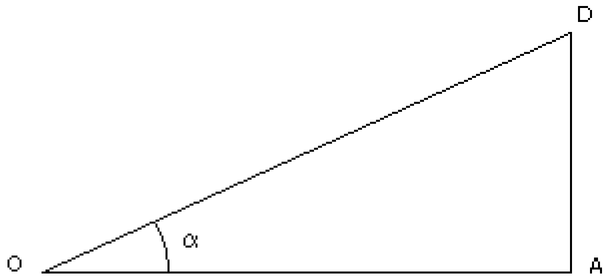
8) Formule di Eulero

$$sen(x) = \frac{e^{i\cdot x} - e^{-i\cdot x}}{2 \cdot i}$$
$$\cos(x) = \frac{e^{i\cdot x} + e^{-i\cdot x}}{2}$$
$$e^{i\cdot x} = \cos(x) + i \cdot sen(x)$$

Dove vale che $z \in \mathbb{C}$

Trigonometria e triangoli

1) Triangolo rettangolo



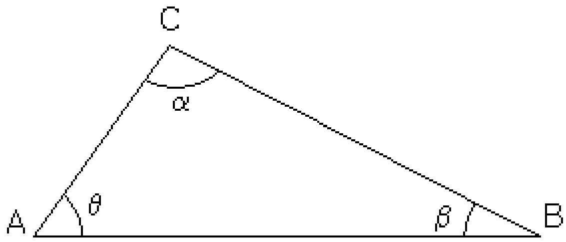
Considerando un triangolo rettangolo qualsiasi, si ha:

$\overline{DA} = \overline{DO} \cdot sen\alpha \quad \Rightarrow \quad sen\alpha = \frac{DA}{DO} \quad \rightarrow$ cateto = ipotenusa · sen angolo opposto al cateto

$\overline{OA} = \overline{DO} \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{AO}{DO} \quad \rightarrow$ cateto = ipotenusa · cos angolo adiacente al cateto

$\overline{DA} = \overline{OA} \cdot tg\alpha \quad \Rightarrow \quad tg\alpha = \frac{DA}{OA} \quad \rightarrow$ cateto = cateto · tg angolo opposto al cateto

2) Triangolo qualsiasi



A) Area

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{DO} \cdot sen\alpha$$

Cioè, scritto a parole:

$$A = (lato \cdot lato) \cdot (\text{seno angolo compreso})$$

B) Teorema di Carnot

$$\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{CB} \cdot \overline{AB} \cdot \cos(\beta)$$

Cioè, scritto a parole:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\text{angolo compreso tra b e c})$$

C) Triangolo inscritto in una circonferenza

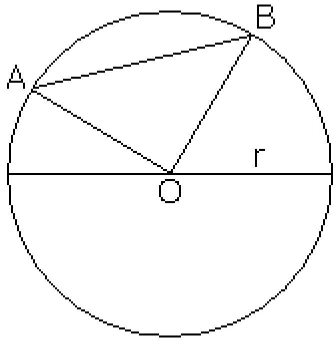
Detto r il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo, si ha che:

$$\frac{\overline{AB}}{sen\alpha} = \frac{\overline{CB}}{sen\theta} = \frac{\overline{AC}}{sen\beta} = 2r$$

Cioè, a parole:

$$\frac{\text{AB}}{\text{seno dell'angolo opposto}} = \text{diametro della circonferenza circoscritta al triangolo}$$

D) Corda



Data la circonferenza del disegno, si ha che:

$$2r = \frac{\overline{AB}}{sen(A\hat{C}B)}$$

Cioè, a parole:

$$diametro = \frac{corda}{\text{sen(angolo al centro)}}$$