Piani

punto P variabile: $P=(x,y,z)$
punto P_0 fissato: $P_0=(x_0,y_0,z_0)$
vettore $v=(a,b,c)$
Un piano può essere determinato in tre modi

A) Punto e vettore ortogonale

Dati: - Punto fissato $P_0=(x_0,y_0,z_0)$
- Punto variabile $P=(x,y,z)$
- Vettore $\vec{n}=(a,b,c)$ perpendicolare al piano

Equazione del piano: a) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$
b) $ax+by+cz=d$ Dove: $d=\overline{n}\cdot\overline{p_0}=ax_0+by_0+cz_0$
$\overline{p}_0=$ vettore tra l'origine e il punto P_0

Osservazioni sui piani:

$$ax+by+cz=d$$

a) Se $d=0$ $\Rightarrow$ il piano passa per l'origine
b) Se $a=0$ $\Rightarrow$ π // Asse x e $\pi\perp$ Asse y e Asse z
Se$b=0$ $\Rightarrow$ π // Asse y e $\pi\perp$ Asse x e Asse z
Se $c=0$ $\Rightarrow$ π // Asse z e $\pi\perp$ Asse x e Asse y
c) Se $x=k$ $\Rightarrow$ π // Piano y,z
Se $y=k$ $\Rightarrow$ π // Piano x,z
Se $z=k$ $\Rightarrow$ π // Piano x,y
d) Si legge subuto un vettore perpendicolare al piano

b) Tre punti

Dati: P_1,P_2,P_3 fissati
P(x,y,z) variabile

Piano: Forma cartesiana: $(\overrightarrow{P_1P_2}\wedge\overrightarrow{P_1P_3})\cdot\overrightarrow{P_1P}=0$ (Deriva dal caso a)
Forma parametrica: $\overrightarrow{P_1P}=s\cdot\overrightarrow{P_1P_2}+t\cdot\overrightarrow{P_1P_3}$ (crea una combinaz. lineare)

C) Due rette incidenti

$$r=\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}$$ (Retta in forma parametrica)

$$s=\begin{cases}x=x_0+dt\\ y=y_0+et\\ z=z_0+ft\end{cases}$$ (Retta in forma parametrica)

$\Rightarrow$
- punto di incidenza $P_0=(x_0,y_0,z_0)$
- vettore direzionale della retta r$w=(a,b,c)$
- vettore direzionale della retta s $s=(d,e,f)$

Si ricade quindi nel caso precedente:

$$(w\wedge z)\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$$

Posizioni tra piani

Piani parallelli: due piani sono paralleli se e solo se sono paralleli i loro vettori ortogonali.
Piani perpendicolari: due piani sono perpendicolari se due vettori appartenenti a essi sono perpendicolari

Rette

a) Punto e vettore parallelo

Dati: - Punto fissato $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

- Vettore $\vec{n} = (a, b, c)$ parallelo alla retta

Equazione parametrica vettoriale: $\vec{s} = \vec{p_0} + t \cdot \vec{n}$

Dove: $\vec{s}$ = retta in forma vettoriale

$\vec{p_0}$ = vettore tra l'origine e il punto P_0

$\vec{n}$ = vettore parallelo alla retta

Equazione parametrica cartesiana: $r = \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

b) Retta passante per due punti

Dati: - Punto fissato $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$

- Punto fissato $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Si ricava il vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ e, utilizzando il punto P_1, si applica il caso a.

c) Retta per due piani:

Si pone a sistema i due piani:

$$\begin{cases} ax + by + c = d \\ ex + fy + gz = h \end{cases}$$

Vettore direzionale: $\vec{v} = \overrightarrow{(a, b, c)} \wedge \overrightarrow{(e, f, g)}$