Funzioni di più variabili a valori vettoriali

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Definizione

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = [f_1(x_1, x_2, \ldots x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots\ldots f_m(x_1, x_2, \ldots x_n)]$$

Funzione definita$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Dove: n = dominio di f. Numero di variabili dalle quali dipendono sia la funzione f, sia le sue componenti

m = codominio di f. Numero di valori distinti che la funzione può assumere.

f_i = componente di f. Riceve in ingresso le n variabili, e restituisce un valore reale che rappresenta uno degli elementi del codominio di f, cioè uno dei valori che la funzione f può assumere. E' quindi una funzione $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Limite

$$\lim_{(x_1,\ldots x_n)\to(p_1,\ldots p_n)} f(x_1, x_2, \ldots x_n) = (l_1, l_2, \ldots, l_m) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{(x_1,\ldots x_n)\to(p_1,\ldots p_n)} f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = l_1 \\ \lim\limits_{(x_1,\ldots x_n)\to(p_1,\ldots p_n)} f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = l_2 \\ \vdots \\ \lim\limits_{(x_1,\ldots x_n)\to(p_1,\ldots p_n)} f_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = l_m \end{array} \right\}$$

Dove: $x_1, \ldots x_n \longrightarrow$ Variabili

$p_1, \ldots p_n \longrightarrow$ Numeri reali

$(l_1, l_2, \ldots, l_m) \longrightarrow$ vettore limite con m componenti. Infatti poiché la funzione f appartiene a uno spazio $\mathbb{R}^m$, il suo limite è un vettore. (Come le funzioni $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$)

Significato: Una funzione $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tende a un vettore limite $(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ se ogni sua componente x_i tende alla corrispondente componente l_i del vettore limite.
(Succede come per le funzioni $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$)

Continuità: una funzione $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua se tutte le sue componenti sono continue

Differenziabilità:

a) Una funzione $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile se sono differenziabili tutte le sue componenti
b) Una funzione $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile se tutti gli elementi della matrice jacobiana associata sono continui

Dominio: Il dominio di una funzione $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è l'intersezione dei domini delle sue componenti

Derivabilità: una funzione $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è derivabile se esistono le derivate parziali delle sue componenti

Matrice Jacobiana

La matrice jacobiana di $f(x_1, \ldots x_n)$ ha per righe i gradienti delle sue componenti, e per colonne le derivate parziali dei gradienti delle sue componenti.

$$J_f(p_0) = \begin{vmatrix} \nabla x_1(x_1, \ldots x_n) \\ \nabla x_2(x_1, \ldots x_n) \\ \vdots \\ \nabla x_m(x_1, \ldots x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{1(x_1)} & f_{1(x_2)} & \ldots & f_{1(x_n)} \\ f_{2(x_1)} & f_{1(x_2)} & \ldots & f_{1(x_n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m(x_1)} & f_{m(x_2)} & \ldots & f_{m(x_n)} \end{vmatrix}$$

Dove: J_f= matrice jacobiana di$f(x_1, \ldots x_n)$

f = funzione $f(x_1, \ldots x_n)$ definita $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$f_{m(x_n)}$ = derivata parziale della componente m della funzione f, fatta rispetto alla variabile n

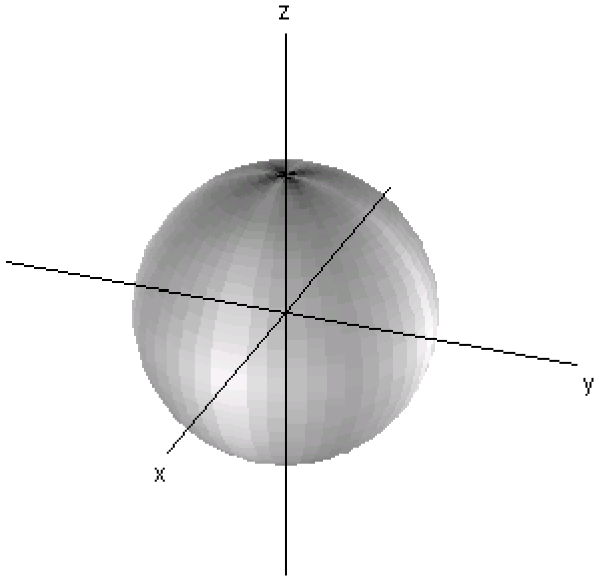
∇x_m = gradiente della componente m della funzione

Superfici in forma parametrica

Le superfici in forma parametrica sono in genere funzioni definite $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, che associano a due variabili t e u un punto P del piano, espresso tramite le sue tre coordinate x,y,z.

$$r(t,u): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad r(t,u)\left\{\begin{array}{l} x = x(t,u) \\ y = y(t,u) \\ z = z(t,u) \end{array}\right\}$$

Esempio:



$$r(\alpha,\beta) = \left\{\begin{array}{l} x = R\cdot sen\alpha \cdot \cos\beta \\ y = R\cdot sen\alpha\cdot \operatorname{sen}\beta \\ z = R\cdot\cos\alpha \end{array}\right\}$$

Linee coordinate: nelle funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che rappresentano delle superfici parametrizzate, se si tiene fissa una delle due variabili a un valore u_0, facendo variare l'altra, si ottiene una linea, detta linea coordinata. Per un punto $P(x_0,y_0)$ della superficie passano due linee coordinate, una tenendo fissa $u=x_0$, e l'altra tenendo fissa $v=y_0$

Superficie regolare: Affinché una superficie parametrizzata sia regolare è necessario che siano verificate queste due condizioni:

a) r(t,u) sia differenziabile

b) La jacobbiana di A abbia rango massimo, cioè rango 2. Affinché ciò si verifichi, il determinante della matrice jacobiana deve essere diverso da zero:

$$\det(J_r) \neq 0$$

Punti singolari di regolarità: punti di una superficie parametrizzate che non sono regolari, cioè nei quali la superficie ha almeno una delle due seguenti caratteristiche:

a) Superficie non differeziabile

b) $\det(J_r) = 0$

Vettore e versore normale alla superficie

data una superficie parametrica r(t,u) il vettore normale (perpendicolare) alla superficie risulta:

$$\vec{V} = r_t \wedge r_u = \det(J_r)$$

Il versore normale alla superficie risuta:

$$\vec{n} = \frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|}$$

Superficie orientata: una superficie si dice orientata se muovendosi su una faccia della superficie, il vettore normale resta sempre dalla stessa faccia. Un esempio di superficie non orientata è il nastro di Moebius

Orientazione di una superficie: scelta coerente di uno dei due versi del versore normale alla superficie, in ogni punto della superficie

Elemento d'area infinitesimo:

$$dS = |r_t \wedge r_u|\,dt\,du$$

Scrittura di superfici $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in forma parametrica $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
Data una funzione f(x,y): $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, è possibile scrivere una funzione r(u,t): $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che rappresenti f in forma parametrica:

$$f(x,y) \to \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = u \\ z = f(t,u) \end{array} \right\}$$

Esempio: $z = x^2 + y^2 \to \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = u \\ z = t^2 + y^2 \end{array} \right\}$

Elemento d'area infinitesimo: $ds = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dt\, du$

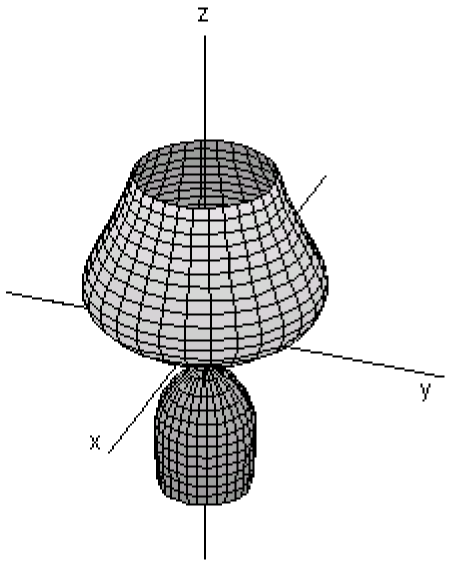
Superfici di rotazione
Le superfici di rotazione sono ottenute facendo ruotare una curva attorno a un asse. E' data la curva di equazione parametrica:

$$c(t) \left\{ \begin{array}{c} x = x(t) \\ y = 0 \\ z = z(t) \end{array} \right\}$$

La curva c(t) è una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, e descrive una curva che vive nel piano xz dello spazio $\mathbb{R}^3$
Considerando come asse di rotazione l'asse z, si può scrivere che:

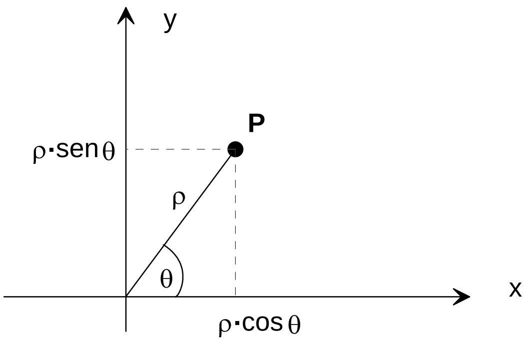
$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t)\cos\theta \\ y = x(t)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z(t) \end{array} \right\} \quad t \in \mathbb{R},\ 0 \le \theta < 2\pi$$

elemento d'area: $ds = |x(t)| \cdot \sqrt{[x(t)']^2 + [z(t)']^2}\, dt\, d\theta$
Esempio:



Trasformazioni di coordinate $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

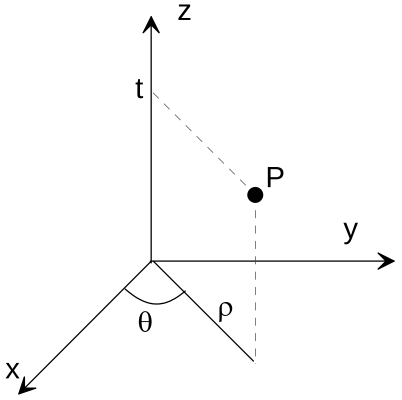
Coordinate polari nel piano



$$f(\rho,\theta) = \left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right\} \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} \rho \in [0, +\infty) \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{array} \right\}$$

Funzione: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
Grafico: $\mathbb{R}^2$
$\det(J_f) = \rho$

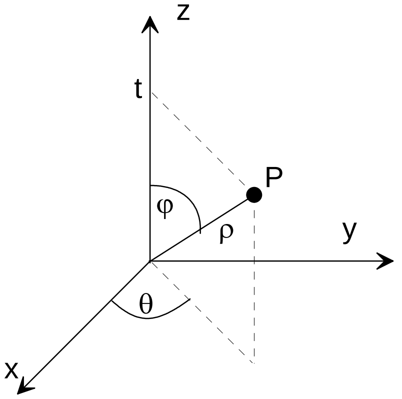
Coordinate cilindriche nello spazio



$$f(t,\varphi,\theta)=\left\{\begin{array}{l} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot\operatorname{sen}\theta \\ z=t \end{array}\right\} \text{ con } \left\{\begin{array}{l} \rho\in[0,+\infty) \\ \theta\in[0,2\pi) \end{array}\right\}$$

Funzione: $\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$
Grafico: $\mathbb{R}^3$
$\det(J_f)=\rho$

Coordinate sferiche nello spazio



$$f(\rho,\varphi,\theta)=\left\{\begin{array}{l} x=\rho\cdot sen\varphi\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot sen\varphi\cdot\operatorname{sen}\theta \\ z=\rho\cdot\cos\varphi \end{array}\right\} \text{ con } \left\{\begin{array}{l} \rho\in[0,+\infty) \\ \theta\in[0,2\pi) \\ \varphi\in[0,\pi] \end{array}\right\}$$

Funzione: $\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$
Grafico: $\mathbb{R}^3$
$\det(J_f)=\rho^2\operatorname{sen}\theta$

Trasformazione regolare di f:$\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$: un trasformazione è regolare se valgono entrambe le seguenti condizioni:
a) $f\in C^1$
b) $\det(J_f)\neq 0$

Punti singolari di trasformazione: punti che non rispettano le condizioni indicate prima di regolarità

Campi vettoriali

I campi vettoriali sono delle funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ che associano a delle variabili un vettore. Un buon esempio di spazio vettoriale è la funzione:

$$\vec{v}(t, x, y, z) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

Questa funzione descrive il moto di una particella in un fluido che scorre. Nell'istante t, la particella ha una posizione x,y,z, e date queste caratteristiche, possiede una velocità $\vec{v}$

I due spazi del dominio e codominio sono concepiti in modo diverso: il dominio è un insieme di punti dello spazio, mentre il codominio è un insieme di vettori

Campo scalare: altro modo di chiamare una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, perchè può essere intesa come un campo vettoriale, dove però al posto di un vettore c'è un numero, detto scalare. Ciascuna componente di un campo vettoriale è un campo scalare.

Linea integrale di campo: qualsiasi curva regolare tangente in ogni punto al campo vettoriale. In particolare, a seconda del tipo di vettore del campo, le linee integrali assumono nomi differenti:

$$\text{Vettore forza} \to \text{lineedi forza}$$

$$\text{vettore velocità} \to \text{lineedi flusso}$$

Per ogni punto dello spazio passa una e una sola linea integrale del campo

Campi conservativi

Un campo F è definito conservativo se:

a) F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

b) $F \in C^1$

c) Esiste una funzione U, detta *potenziale*, che possiede le seguenti caratteristiche:

- La funzione U è definita $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- La funzione U è di classe C^2
- Vale l'uguaglianza: $F = \nabla U$

Unicità di U: esistono infinite U, che sono differenziate a meno di una costante

Criteri di conservatività

In un insieme $A \in \mathbb{R}^3$ è dato un campo $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ del tipo:

$$F = [a(x, y, z),\ b(x, y, z),\ c(x, y, z)]$$

Si può affermare che il campo è conservativo se valgono entrambe le seguenti condizioni:

a) $\left\{ \begin{array}{c} a_y = b_x \\ a_z = c_x \\ b_z = c_y \end{array} \right\}$

b) L'insieme A è semplicemente connesso

Oppure:

a) Il campo è irrotazionale (condizione necessaria)

b) L'insieme A è semplicemente connesso

Oppure:

a) Data una qualsiasi linea chiusa γ tutta contenuta in A, vale che $\int_\gamma F \cdot ds = 0$

b) A è semplicemente connesso

Rotore

E' dato un campo $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ del tipo:

$$F = [F_1(x,y,z),\ F_2(x,y,z),\ F_3(x,y,z)]$$

Allora il rotore è definito come:

$$\operatorname{rot} F = \nabla \wedge F = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Dove: ∂_x = operatore di derivazione rispetto a x
F_1 = componente del campo vettoriale

Campo irrotazionale: campo che ha rotore nullo

Significato fisico: il rotore indica la vorticosità di un moto, cioè quanti vortici si creano rispetto alla direzione di moto del fluido.

Divergenza

E' dato un campo $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ del tipo:

$$F = [F_1(x,y,z),\ F_2(x,y,z),\ F_3(x,y,z)]$$

Allora la divergenza è definita come:

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$\operatorname{div} F \longrightarrow$ campo scalare definito $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

Dove: $\nabla \cdot F$ = prodotto scalare
∇ = operatore gradiente

Significato fisico: la diveregenza indica l'intensità delle sorgenti o dei pozzi del campo.

Integrale di linea di seconda specie

Sono dati:

a) Un campo vettoriale F

b) Un arco di curva parametrizzato come:

$$r(t) = x(t) \cdot i + y(t) \cdot j + z(t) \cdot k \text{ con } a < t < b$$

Allora si definisce integrale di linea si seconda specie il seguente integrale, nel quale ·indica un prodotto scalare:

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_a^b F[r(t)] \cdot r'(t)\, dt$$

Significato fisico: l'integrale di linea di seconda specie serve per calcolare il lavoro compiuto da una particella che si muove nel campo vettoriale F lungo una traiettoria r(t)

Il lavoro dipende dal verso di percorrenza della curva.

Lavoro in un campo conservativo

Se un campo è conservativo e U è il suo potenziale, il lavoro del campo lungo un qualunque cammino che unisce i punti A e B, è dato da:

$$L = U(B) - U(A)$$

1) Se r(t) è una linea chiusa, il lavoro è quindi nullo
2) Si può scegliere lungo quale linea integrare
3)Se U è noto, si può evitare di calcolare l'integrale