Curve

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

<u>Linee di livello:</u> curva che si ottiene sezionando il grafico di una funzione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con dei piani del tipo z=k, e quindi paralleli al piano xy e perpendicolari all'asse z. Matematicamente si ottengono delle funzioni del tipo:

f(x,y)=0

cioè delle funzioni di 1 variabile $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se si incrementa costantemente k, I piani di livello saranno presi a intervalli regolari. Allora più sono vicine due linee di livello successive, più la funzione cresce velocemente in quella zona.

Limiti di funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x,y \to a,b} f(x,y) = l$$

<u>Teoremi validi:</u> a) Unicità del limite: il limite, se esiste, è unico.
Questo teorema è importante per il calcolo, perchè dice che se limiti diversi per uno stesso valore, il limite non esiste. Quindi se il limite dipende da parametri o variabili, non esiste

b) Teorema del limite della funzione composta

c) Teorema della somma,del prodotto per costante, del prodotto, del quoziente di due funzioni

d) Teorema sulla continuità della somma, del prodotto, del quoziente di funzioni continue

Funzione continua: una funzione $f(x,y)$è continua in $P(x_{0,}y_0)$ se:

$$\lim_{x,y \to x_0,y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Calcolo del limite

1) Applicazione del teorema del confronto: stesso teorema dei limiti in una variabile
2) Attraverso considerazioni matematiche varie
3) Dimostrando che vale la seguente disuguaglianza:

$$|f(\rho,\theta) - l| \leq g(\rho) \text{ con } \lim_{\rho \to 0} g(\rho) = 0$$

Dove: $f(\rho,\theta)$ = funzione di cui calcolare il limite, espressa in coordinate polari
l = limite della funzione f(x,y)
$g(\rho)$ = funzione opportuna scelta dall'utente

3) Metodo delle coordinate polari: si esprime il limite in coordinate polari, e si calcola il limite. il risuntato ottenuto è il limite della funzione, perchè perchè ρ e θ rappresentano tutte le possibili direzioni dello spazio.

Esistenza del limite

1) Metodo delle direzioni differenti: si sostituisce a x o a y una direzione attraverso la quale arrivare (ad esempio una generica retta y=mx). Il limite non esiste se:
a) Il limite dipende da un parametro
b) Per direzioni diverse, il limite assume direzioni diverse
Questo metodo va per tentativi, e va usato se si ha l'intuizione giusta su quale direzione utilizzare
2) Metodo delle coordinare polari: si esprime il limite il coordinate polari, e poi si calcola il limite. Se il risultato dipende da θ, il limite non esiste, perchè al variare di θ, cioè delle direzioni della funzione, si ottengono limiti diversi

Insiemi di definizione

Insieme di definizione: l'insieme di definizione è l'insieme dei valori che possono assumere le x e le y in una funzione di 2 variabili. In genere è definitor tramite diesequazioni, che individuano porzioni del piano xy

Insieme aperto: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 0\}$
$\forall\ x \in A$ x è interno a A

Insieme chiuso: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \geq 0\}$
$\mathbb{R}^n - A = A^C$ è aperto

Intorno di $P(x_0, y_0)$: insieme A aperto che contiene il punto P

Insime limitato: un insieme A si dice limitato se è contenuto in un cerchio del tipo:

$$x^2 + y^2 = R$$

Con R costente suffcientemente grande. Un insieme è cioè limitato se nessuna delle sue parti si estende fino all'infinito

Connesso per archi: $\forall\ p, q \in A$ esiste un arco di curva continuo tutto compreso in A che unisce p a q. La connessione per archi indica che l'insieme A è un pezzo unico.

Bordo: è la linea di bordo che delimita l'insieme a. Negli insiemi chiusi, il bordo fa parte dell'insieme A, mentre negli insiemi aperti il bordo non fa parte di A

Aperto semplicemente connesso:
a) Aperto: E' un insieme aperto
b) Connesso: E' connesso per archi
c) Semplicemente: Ogni curva formata da una linea chiusa e continua nell'aperto può essere ristretta fino a diventare un punto, senza mai dover essere spezzata o fatta uscire dall'aperto

Esempio: un cerchio è un insieme semplicemente connsesso.
Una corona circolare è un insieme connesso, ma non semplicemente connesso: se si traccia una curva chiusa intorno alla circonferenza più interna, non è possibile stringerla fino a un punto, perchè c'è il buco della circonferenza interna

Teorema di Weierstrass (solo x $A \in \mathbb{R}^2$)

$A \in \mathbb{R}^2$
A chiuso e limitato $\Rightarrow$ f(x,y) ammette almeno un max e un min in A
f(x,y) continua

Teorema degli zeri (solo x $A \in \mathbb{R}^2$)

$A \in \mathbb{R}^2$
A continua per archi
f continua $\Rightarrow$ $\exists\ r \in A$ tale che f(r)=0
$f(p) < 0$ e $f(q) > 0$ con $p, q \in A$
PQ arco di curva qualsiasi

Derivata parziale

Definizione: è la derivata calcolata derivando una variabile, e trattando le altre come delle costanti numeriche. Quindi in R^n esistono n derivate parziali fatte rispetto a x,y,z

Notazione: $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ $\quad f_x(x, y)$ $\quad \partial_x f(x, y)$ $\quad D_x(x, y)$ $\quad D_1 f(x, y)$
$\downarrow$
Il numero indica la variabile di derivazione, non il grado di derivazione

Funzione derivabile

Definizione: una funzione è derivabile in un insieme A se in quell'insieme esistono tutte le sue derivate parziali

Valore della derivabilità: In funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la derivabilità implica la continuità e l'esistenza di una retta tangente. Ciò non vale per le funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: la derivabilità non garantisce ne la continuità, ne l'esistenza di un piano tangente alla curva.

Derivabilità $\not\Leftrightarrow$ Continuità

Derivabilità $\not\Leftrightarrow$ Esistenza del piano tangente

Casi di esistenza della derivata:

a) In alcuni casi può succedere che $f(x_0,y_0)$ esiste e è continua, ma $f_x(x_0,y_0)$ è discontunua e non esiste in x_0,y_0 (esempio: $f(x,y)=y\cdot\sqrt{x}$).

Soluzione: 1) Per conoscere la derivata di $f(x_0,y_0)$, si esegue il limite:

$$\lim_{x,y\to x_0,y_0} f_x(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)$$

Questo limite può anche non esistere

2) Si applica la definizione di derivata

b) In alcuni casi può succedere che si possa derivare la funzione con le tradizionali regole di calcolo, ma in realtà la derivata non esiste. Bisognerebbe sempre verificare che la derivata esiste, cioè che il limite della definizione di derivata esista. Tuttavia in genere si lavora su funzioni buone, che amettono sempre la derivata.

Funzione differenziabile

Definizione: una funzione è differenziabile se vale che:

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0.y_0)=f_x(x_0,y_0)\cdot h+f_y(x_0,y_0)\cdot k+o(\sqrt{h^2+k^2})\quad \text{Se } (h,k)\to(0,0)$$

Calcolo della differenziabilità:

a) Dimostrando che vale il seguente limite:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h,y_0+h)-[f(x,y)+f_x(x,y)\cdot h+f_y(x,y)\cdot k]}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

b)Se $f(x,y)\in C^1(A)$ e A è un insieme aperto

Valore della differenziabilità: Se f(x,y) è differenziabile ⇒ a) E' continua

b) E' derivabile

Gradiente

Gradiente: $\nabla f(x,y)=[f_x(x,y),f_y(x,y)]$

Notazione: $\nabla f(x,y)\quad Df(x,y)\quad Grad[f(x,y)]$

Proprietà del gradiente

a) $\nabla(\alpha\cdot a+\beta\cdot b)=\alpha\cdot\nabla a+\beta\cdot\nabla b$

b) $\nabla(f\cdot g)=g\cdot\nabla f+f\cdot\nabla g$

c) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\cdot\nabla f-f\cdot\nabla g}{g^2}$

Dove: f, g = funzioni in due variabili x,y

α,β = numeri reali

Significato grafico: - direzione verso la quale la crescita è massima

- vettore perpendicolare alle curve di livello

Gradiente di funzioni composte:

a) Se è data la seguente funzione composta:

$$g[f(x,y)]$$

Dove: g(t): $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

f(x,y): $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

Allora vale la seguente uguaglianza:

$$\nabla g[f(x,y)]=g'[f(x,y)]\cdot\nabla f(x,y)$$

Dove: $g'[f(x,y)]$ = la funzione g(t) viene derivata, e poi le viene applicata la sostituzione $t\to f(x,y)$

$\nabla f(x,y)$ = gradiente di f(x,y

b)Se è data la seguente funzione composta:

$$f[g(t)]=f[x(t),y(t)]$$

Dove: g(t): $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, cioè $g(t)=\begin{Bmatrix} x(y)\\ y(t)\end{Bmatrix}$

f(x,y): $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

Il gradiente risulta:

$$\nabla f[g(t)]=\nabla f[g(t)]\cdot g(t)'$$

Dove: $\nabla f[g(t)]$ = prima si calcola il gradiente $\nabla f(x,y)$, e poi si sostituiscono a x e y le funzioni x(t) e y(t)

$g(t)'$ = derivata di g(t)

Derivata direzionale
Le derivate parziali indicano come cresce la funzione lungo le direzioni dei tre assi cartesiani.
Le derivate direzionali indicano come cresce la funzione lungo una direzione qualsiasi.

$$\partial_V f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h\cdot\cos\theta, y+h\cdot\operatorname{sen}\theta) - f(x,y)}{h}$$

Deve esistefe finito tale limite

<u>Legame tra derivate parziali e derivate direzionali</u>

$$\theta = 0 \Leftrightarrow \; v(1,0) \;\Leftrightarrow\; D_v f(x,y) = f_x(x,y)$$
$$\theta = \frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; v(0,1) \;\Leftrightarrow\; D_v f(x,y) = f_y(x,y)$$

<u>Formula generale:</u>

$$D_v f(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot\overrightarrow{v} = f_x(x,y)\cdot\cos\theta + f_y(x,y)\cdot\operatorname{sen}\theta$$

Dove: $D_v f(x,y)$ = derivata direzionale di f(x,y)
$\nabla f(x,y)$= gradiente di f(x,y)
$\cdot$ = prodotto scalare
$\overrightarrow{v}$ = vettore definito come: $\overrightarrow{v} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$
θ = angolo della derivata direzionale

Derivate successive

- $f(x,y)$
  - $f_x(x,y)$
    - $f_{xx}(x,y)$ ⟶ La prima e la seconda derivazione sono rispetto a x
    - $f_{xy}(x,y)$ ⟶ La prima derivazione è rispetto a y
      La seconda derivazione è rispetto a x
  - $f_y(x,y)$
    - $f_{yx}(x,y)$ ⟶ La prima derivazione è rispetto a x
      La seconda derivazione è rispetto a y
    - $f_{yy}(x,y)$ ⟶ La prima e la seconda derivazione sono rispetto a y

Derivata di grado n: si continua a derivare

Teorema si Schwarz
Se due derivate seconde f_{xy} e f_{yx} sono definite e continua in A, allore esse coincidono in A.

Funzione di classe $C^n(A)$
a) f è c1
b) f è differenziabile
c)derivate prime sono differenziabili
d)derivate seconde sono continue
e) derivate seconde miste coincidono

Classi
Si dice che $f \in C^n(A)$ se possiede determinate caratteristiche in un introno A. A può essere anche tutto l'insieme $\mathbb{R}^n$ nel quale vive la funzione

C^0: la funzione è continua in un intorno A.
C^1: le derivate prime della funzione esistono e sono continue nell'intorno A
C^2: le derivate seconde della funzione esistono e sono continue nell'intorno A
C^n: le derivate n-sime di f esistono e sono continue nell'intorno A

Serie di Taylor al II ordine con resto di Peano
Sviluppo di Taylor arrestato al II ordine con resto di Peano, centrato in P(x_0,y_0)

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$
$$\frac{1}{2}[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\cdot f_{yx}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2] + o(dx^2+dy^2)$$

Significato dei membri dello sviluppo:

$$f(x,y)=\underbrace{f(x_0,y_0)}_{\text{Piano tangente}}$$
$$\underbrace{+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\text{Differenziale primo}}$$
$$+\frac{1}{2}\Big[\underbrace{f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2\cdot f_{yx}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0)+f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2\ \Big]+o(dx^2+dy^2)}_{\text{Differenziale secondo (senza } \frac{1}{2}\text{)}}$$

Matrice Hessiana: *cosa:* matrice contenente I coefficineti del differenziale secondo

forma: $Hf(x_0,y_0)=\begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$

proprietà: per il teorema di Schwarz, se $f(x_0,y_0)\in C^2$, allora la matrice Hessiana è simmetrica

Studio dei massimi minimi in funzioni libere

Definizione di massimo assoluto

f considerata in un intorno A
$A\in R^n$
f funzione definita $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
$x_0\in A$

$\Longrightarrow$ x_0 è un punto di massimo assoluto per f in A se:
$\forall x\in A$ vale che $f(x)\le f(x_0)$

Definizione di massimo relativo

f considerata in un intorno A
$A\in R^n$
f funzione definita $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
$x_0\in A$
U è un intorno di x_0

$\Longrightarrow$ x_0 è un punto di massimo relativo per f in A se:
$\forall x\in U$ vale che $f(x)\le f(x_0)$

Punti critici

Definizione: I punti critici sono I punti in cui il gradiente si annulla. Non è detto che siano per forza punti di massimo o minimo. Possono avere vali valori:

Punto critico
- Massimo relativo/assoluto
- Minimo relativo/assoluto
- Punto di sella
- Punto di colle

Teorema di Fermat: *Definizione:* Sia x_0 un punto di massimo/minimo relativo di una funzione f, vale che:

$$\nabla f(x_0)=0$$

Significato: questo teorema indica che i punti di massimo e minimo di una funzione vanno cercati tra i punti critici

Valore dei punti critici tramite il determinante

Per individuare il significato di un punto critico (massimo,minimo,punto di sella, punto di colle), si studia il segno della matrice hessiana H. Con il metodo del determinante, si ottengono i seguenti casi:

Segno del determinante	**Segno di** f_{xx}	**Segno della forma quadratica (Segno dell'Hessiana)**	**Punto critico**
$\det(H)>0$	$f_{xx}>0$	definita positiva	minimo
$\det(H)>0$	$f_{xx}<0$	definita negativa	massimo
$\det(H)<0$		indefinita	sella/colle
$\det(H)=0$		semidefinita (sia positiva che negativa)	dubbio

Valore dei punti critici tramite gli autovalori

Per individuare il significato di un punto critico (massimo,minimo,punto di sella, punto di colle), si studia il segno della matrice hessiana H. Con il metodo degli autovalori, si ottengono i seguenti casi:

Segno dei λ	**Valore dei λ**	**Segno dell'Hessiana**	**Punto critico**
Tutti i λ positivi	Tutti I $\lambda \neq 0$	definita positiva	minimo
Tutti i λ positivi	Alcuni $\lambda = 0$	semidefinita positiva	dubbio
Tutti i λ negativi	Tutti I $\lambda \neq 0$	definita negativa	massimo
Tutti i λ negativi	Alcuni $\lambda = 0$	semidefinita negativa	dubbio
Alcuni λ positivi Alcuni λ negativi		indefinita	sella/colle

Calcolo degli autovalori

1) E' data la matrice: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

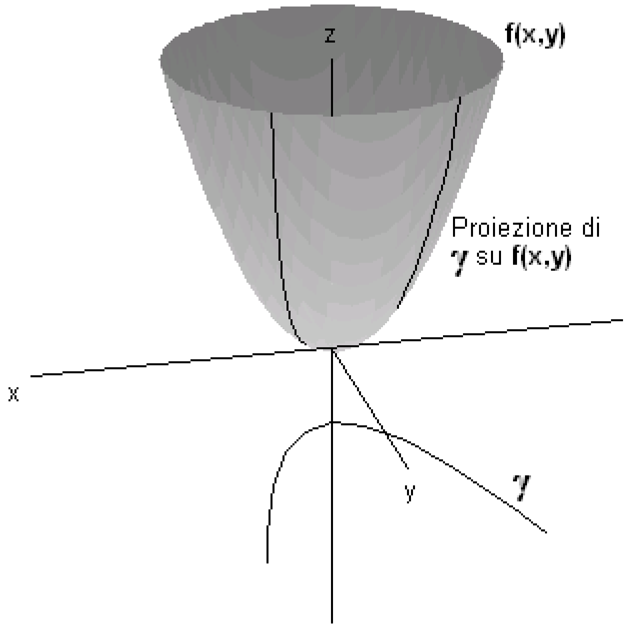
2) Si calcola il polinomio caratteristico $D(\lambda)$:

$$D(\lambda) = \det\left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \right\} = \det\left[\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} \right]$$

3) Gli autovalori sonogli zeri del polinomio $D(\lambda)$, cioè le soluzioni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots.$ dell'equazione:

$$D(\lambda) = 0$$

Calcolo di massimi e minimi in funzioni vincolare



Vincolo: la funzione f(x,y) non è più consiederata nel suo intero, ma solo ristrettamente al vincolo γ imposto. Le variabili x e y di f(x,y) non vengono più fatte variare lungo tutto il piano, ma solo lungo il vincolo γ, che può essere una funzione o la traccia di una funzione.

Nota: osservando il metodo A, risulta evidente che la vincolazione ha senso solo se:

$$\left(\frac{\text{Numero di equazioni}}{\text{di vincolo}}\right) \leq \left(\frac{\text{Numero di variabili della}}{\text{funzione vincolata}}\right)$$

a) Metodo A: composizione di funzione

Sono date le due seguenti funzioni:

Funzione di vincolo:

$$h(t) = \left\{ \begin{array}{c} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\} \rightarrow \gamma = \text{traccia}$$

h(t) funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ in forma parametrica

Funzione vincolata:

$$f(x, y)$$

f(x,y) funzione $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

E' possibile studiare I massimi e I minimi della funzione attraverso la composizione delle due funzioni. Si può ottenere una funzione composta g(t):

$$g(t) = f[x(t), y(t)]$$

Dove: h(t) = funzione di vincolo $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
f(x,y) = funzione vincolata $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
g(t) = nuova funzione, semplice da studiare: g(t):$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

b) Metodo B: moltiplicatori di Lagange

Sono date le seguenti informazioni:

$f(x, y) \rightarrow$ funzione da vincolare. E' una superficie nello spazio

$h(x, y) = b \rightarrow$ funzione di vincolo. E' una curva nello spazio

1) Si trova la funzione Lagrangiana:

$$£(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot [b - h(x, y)]$$

$\lambda \rightarrow$ moltiplicatore di Lagrange

2) Si calcolano le soluzioni di questo sistema:

$$\nabla £(x, y, \lambda) = 0 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} £_x = 0 \\ £_y = 0 \\ £_\lambda = 0 \end{array} \right\} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} f_x - \lambda g_x = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 0 \\ f_\lambda - g = 0 \end{array} \right\}$$

3) Le soluzioni di questo sistema sono I punti critici della funzione vincolata. Tramite considerazioni si determina la loro natura

Nota Bene: per determinare la natura dei punti critici di funzioni vincolate è molto utile il teorema di Weierstrass