Funzioni

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Definizione

Le funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ hanno più variabili dipendenti che dipendono da una sola variabile indipendente, in genere t. Hanno una forma del tipo:

$$f(t) = f\left\{ \begin{array}{c} x_1 = f_1(t) \\ x_2 = f_2(t) \\ \vdots \\ x_n = f_n(t) \end{array} \right\} \quad \text{oppure}$$

Dove: x_n = variabile del codominio di f. Sono i valori distinti che la funzione può assumere.

$f_n(t)$ = componente di f. Riceve in ingresso t, e restituisce un valore reale che rappresenta uno degli elementi del codominio di f, cioè uno dei valori che la funzione f può assumere. E' quindi una funzione$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Esempio:$f(t) = \left\{ \begin{array}{c} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\}$ $\longrightarrow$ La funzione descrive il moto di un punto (cioè indica le coordinate z,y,z della sua posizione) in funzione del tempo t

Dominio: il dominio di una funzione f definita è dato dall'intersezione dei domini delle singole componenti

Forma parametrica: Poichè più variabili sono espresse in funzione di un'unica variabile t, le funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sono anche dette funzioni parametriche

Traccia della funzione: è il grafico che si ottiene disegnando tutti i punti individuati dalle variabili dipendenti di R^n. Non è quindi il grafico della funzione: è andato persa l'informazione relativa alla variabile indipendente t.
Altri nomi: sostegno della curva - immagine della funzione

Funzione chiusa: un funzione è chiusa se la sua traccia forma una linea chiusa, come un cerchio. Matematicamente, detti a e b due punti dello spazio, vale che:

f(a)=f(b)

Funzione semplice: una funzione è semplice se in nessun punto dello spazio la traccia presenta nodi o punti di sovrapposizione. Deve succedere che:

$$f(a) \neq f(b) \qquad \forall\, a \neq b$$

Regolarità: una funzione f(t) definita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è regolare se:

a) $\exists\ f(t)'$
b) $f(t)' \neq 0$
c) $f(t)'$ è continua

Orientamento

Definizione: Pensiamo all'esempio iniziale di funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, dove il moto di un punto lungo una traiettoria è in funzione di t. Al variare di t, il punto materiale si può muovere lungo la traiettoria in due versi, ad esempio orario o antiorario, oppure positivo o negativo.

Calcolo: Per calcolare l'orientamento di una curva, si sostituiscono due valori $t_1 > t_2$, e si vede cosa succede al punto sulla traccia

Cambio do orientamento: $t \to -t$

Percorrere 2 volte la curva: $t \to 2t$ oppure si allarga l'intervallo di t

Calcoli

Limite di una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t \to p_0} f(t) = (l_1, l_2, l_3) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \to p_0} x(t) = l_1 \\ \lim_{t \to p_0} y(t) = l_2 \\ \lim_{t \to p_0} z(t) = l_3 \end{array} \right\}$$

Cioè una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tende a un vettore (l_1, l_2, l_3) per t che tende a p_0, se e solo se ogni sua componente tende alla corrispondente componente l del vettore limite.

Teoremi sui limiti

Per le funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ valgono tutte le proprietà dei limiti classici di funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) Unicità del limite
b) Teorema sul limite della somma
c) Teorema sul limite del prodotto per una costante
d) Definizione di funzione continua:

$$\lim_{t \to p_0} f(t) = f(t)$$

Derivate

La derivata f(t)' di una funzione f(t) definita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ vale:

$$f(t)' = \left\{ \begin{array}{l} x' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} \\ z' = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \end{array} \right\}$$

Cioè per derivare una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ si derivano tutte le sue componenti

Vettore velocità istantanea: il vettore che indica la velocità istantanea del punto che si muove sulla traccia della funzione è la derivata della funzione data, cioè:

$$\overrightarrow{v(t)} = [x(t)', y(t)', z(t)']$$

Velocità scalare: $v = \left|\overrightarrow{v(t)}\right|$

Versore tangente a una curva: $\vec{V} = \frac{f(t)'}{|f(t)'|}$

Lunghezza di un arco

La lunghezza l di un arco di curva f(t) definita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ compreso tra due estremi a e b è data da:

$$l = \int_a^b |f(t)'| dt$$

Parametro ad arco

Si può costruire una funzione integrale con l'integrale di linea. Questa funzione esprime la lunghezza dell'arco (variabile dipendente) in funzione dell'istante t (variabile indipendente):

$$l = \int_{t_0}^{t} |f(t)'| dt \text{ con } t_0 \to \text{costante}$$

Se l'integrale si può calcolare esplicitamente, si ottiene una funzione del tipo:

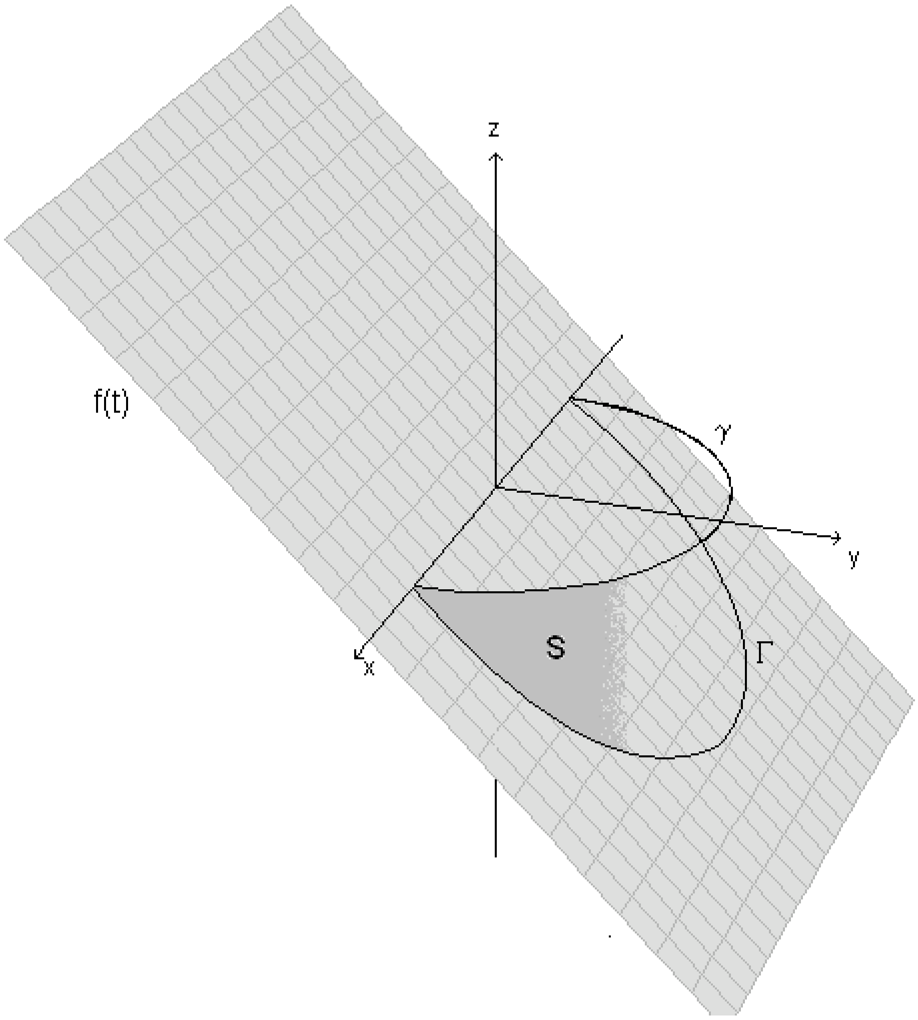
$l = f(t) \quad \to$ esprime la lunghezza dell'arco in funzione dell'istante t

Questa funzione può essere invertita:

$t = f(t)^{-1} = g(l) \quad \to \quad t = g(l) \quad \to$ Esprime l'istante di tempo in funzione della lunghezza percorsa

t diventa la variabile dipendente, mentre s, che viene chiamato ora *parametro ad arco*, diventa la variabile indipendente

Integrale di linea di I specie



L'integrale di linea è definito come:

$$S = \int_\gamma f(t)ds = \int_a^b f[r(t)] \cdot |r(t)'|dt$$

Dove: f(t) = funzione qualsiasi parametrizzata
r(t) = funzione qualsiasi parametrizzata
γ = traccia della funzione r(t) compresa tra gli estremi a e b
Γ = proiezione di γ sulla superficie f(t)

Significati:

Grafico: in genere, data un superficie f(t) e una linea curva γ, l'integrale di linea calcola la superficie in verticale che c'è tra la superficie f(t) e la curva γ. Come per l'integrale classico, la superficie viene calcolata tra due estremi a e b scelti dall'utente.

Massa totale: un filo γ di materiale non omogeneo ha densità lineare ρ. La sua massa totale è:

$$m = \int_\gamma \rho\, ds$$

Momento d'inerzia:

Dati: - un filo γ, traccia della funzione r(t), compreso tra gli estremi a e b
- La funzione $\rho(x, y, z)$ che esprime la densità lineare di massa del filo
- La distanza D(x,y,z) del filo dall'asse di rotazione

Allora il momento d'inerzia del filo rispetto all'asse è dato da:

$$I = \int_\gamma D^2 \cdot \rho \ ds = \int_a^b D[r(t)]^2 \cdot \rho[r(t)] \cdot |r'(t)|dt$$

Nota: - viene composta sia la funzione ρ che la funzione D
- Se la densità è costante, allora ρ è una costante, e quindi non viene composta da r(t), e si tratta come una semplice costante nell'integrale

Baricentro: $x_b = \frac{1}{m} \int_\gamma x_\rho \cdot \rho\, ds$ con x_ρ = componente di ρ rispetto alle x
analogamente si fa per y_b e z_b