EQUAZIONI DIFFERENZIALI

DEFINIZIONE:

UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE È UN'EQUAZIONE IN CUI UNA VARIABILE È ESPRESSA IN FUNZIONE DI UNA SERIE DI FUNZIONI ELEMENTARI ESPRESSE, E IN FUNZIONE DELLE SUE DERIVATE.

AD ESEMPIO, IN FISICA, L'EQUAZIONE DELLO SPAZIO RISPETTO AL TEMPO È:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

MA SAPPIAMO ANCHE CHE:

$v = s'$ → LA VELOCITÀ È LA DERIVATA PRIMA DELLA VELOCITÀ

$a = s''$ → LA ACCELERAZIONE È LA DERIVATA SECONDA DELLO SPAZIO.

QUINDI LA PRECEDENTE FORMULA SI PUÒ RISCRIVERE COME:

$$s = s_0 + s' t + \frac{1}{2} s'' t^2$$

CIOÈ, IN FORMA GENERICA:

$$s = a s'' t^2 + b s' t + c$$

IN QUESTA EQUAZIONE, s È ESPRESSO IN FUNZIONE DI t, VARIABILE ELEMENTARE, E IN FUNZIONE DELLE SUE DERIVATE.

FUNZIONI LIPSCHITZ.

PER DISCUTERE L'UNICITÀ E ESISTENZA DELLE SOLUZIONI, BISOGNA RIPASSARE IL CONCETTO DI FUNZIONE LIPSCHITZ:

<u>DEFINIZIONE</u>: UNA FUNZIONE È LIPSCHITZIANA SE ESISTE UN RAPPORTO DI PROPORZIONALITÀ DIRETTA TRA LA VARIAZIONE DELLE y E LA VARIAZIONE DELLE x:

$\Delta y = k \cdot \Delta x$ DOVE $k \in \mathbb{R}$ E È LA COSTANTE DI LIPSCHITZ

$$\downarrow$$

$$|F(x_1) - F(x_2)| = k \cdot |(x_1 - x_2)|$$

PER VERIFICARE SE UNA FUNZIONE È LIPSCHITZ, SI POSSONO USARE DUE CONDIZIONI:

A) $|F(x_1) - F(x_2)| = K \cdot |x_1 - x_2|$

B) VALGONO QUESTE DUE CONDIZIONI:

1) $F(x)$ È DERIVABILE

2) $F'(x) \leq M$, DOVE M È LA COSTANTE DI LIPSCHITZ.

QUESTE DUE CONDIZIONI A E B POSSONO ESSERE VERIFICATE ANCHE SOLO PER ALCUNI INTERVALLI:

$(-\infty; +\infty)$ OPPURE $(a; b)$

UNA FUNZIONE LIPSCHITZ È SEMPRE CONTINUA NEI PUNTI IN CUI È LIPSCHITZ.

SOLUZIONI DI UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE

VI SONO DUE TIPI DI SOLUZIONI:

A) SOLUZIONI PARTICOLARI O SINGOLARI.

SI HANNO QUANDO $f(y) = 0$

IN QUESTO CASO L'UGUAGLIANZA È VERIFICATA

B) SOLUZIONI NORMALI DEDUCIBILI CON VARI METODI (VEDI FOGLI DOPO).

ESISTENZA E UNICITÀ

A) ESISTENZA DELLE SOLUZIONI (TEOREMA DI PEANO)

DATO UN PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = F(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

DATO UN RETTANGOLO R CHE CONTIENE IL PUNTO $P(t_0, y_0)$, SI HA CHE:

SE $F(t, y)$ È CONTINUA SU R, ALLORA IL PROBLEMA DI CAUCHY AMMETTE <u>ALMENO</u> UNA SOLUZIONE, DEFINITA SU UN INTERVALLO CHE NON PER FORZA COINCIDE CON R, MA CHE CONTIENE IL PUNTO P.

<u>ESEMPIO:</u>

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

QUESTA FUNZIONE È CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}$, PERCIÒ HA ALMENO UNA SOLUZIONE. NON ESSENDO PERÒ LIPSCHITZ (VEDI TEOR. DI CAUCHY), PUÒ AVERE ANCHE ALTRE SOLUZIONI.

B) TEOREMA DELL'ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE DELLE SOLUZIONI (TEOREMA DI CAUCHY)

DATO IL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = F(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

DATO UN RETTANGOLO R CHE CONTIENE IL PUNTO $P(t_0, y_0)$, SE SONO VERIFICATE LE SEGUENTI CONDIZIONI:

1) $F(t, y)$ È CONTINUA IN R

2) $F(t, y)$ È LIPSCHITZ IN y, UNIFORMEMENTE RISPETTO ALLA VARIABILE t, NELL'INTERVALLO R.

ALLORA IL PROBLEMA DI CAUCHY HA UNA E <u>UNA SOLA</u> SOLUZIONE, DEFINITA IN UN INTERVALLO CHE NON COINCIDE PER FORZA CON R.

c) TEOREMA DELL'ESISTENZA IN GRANDE

LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY VALE, SECONDO IL TEOREMA DI CAUCHY, SOLO ALL'INTERNO DI UN INTERVALLO.

TUTTAVIA, LA SOLUZIONE PUÒ ESSERE ESTESA DA UNA ZONA LOCALE A TUTTO IL CAMPO $\mathbb{R}$ SE VALE LA SEGUENTE CONDIZIONE:

$$|F(t,y)| \leq c_1 + c_2 \cdot |y|$$

CIOÈ SE LA FUNZIONE CRESCE O DECRESCE NON PIÙ VELOCEMENTE DI UNA RETTA, TRASLATA DI C_1 E CON $m = C_2$