INTEGRALI INDEFINITI

ALCUNI INTEGRALI, NONOSTANTE ABBIANO UN ESTREMO A 0 O +∞, POSSONO COMUNQUE AVERE UN'AREA DEFINITA.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{k\to+\infty} \int_1^{k} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{k\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^k =$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{1}{k}\right) - \lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{1}{1}\right) = 0-(-1) = 1$$

L'AREA DI QUESTO INTEGRALE, NONOSTANTE IL LIMITE DESTRO SIA +∞, È COMUNQUE DE[FI]NITO, E VALE:

$A = 1$

TUTTAVIA, IN MOLTI CASI NON ESISTE LA POSSIBILITÀ DI CALCOLARE L'AREA, PERCHÉ GLI INTEGRALI SONO MOLTO COMPLESSI, MA È POSSIBILE DETERMINARE SOLO SE L'AREA È DEFINITA

AREA DEFINITA ⟶ INTEGRALE CONVERGENTE

AREA INDEFINITA ⟶ INTEGRALE DIVERGENTE

ESISTONO 3 CRITERI PER VERIFICARE LA CONVERGENZA:

1) CRITERIO DEL CONFRONTO (FUNZIONI POSITIVE)

DATA $F(x)$, SUPPONIAMO DI AVERE UN'ALTRA FUNZIONE $g(x)$ TALE CHE:

$F(x) \leq g(x)$ NB: MINORE O UGUALE

ALLORA VALE CHE:

$$\text{SE } \exists \int_M^{+\infty} g(x) \text{ FINITO} \Rightarrow \exists \int_M^{+\infty} F(x) \text{ FINITO}$$

$$\text{SE } \nexists \int_M^{+\infty} g(x) \text{ FINITO} \Rightarrow \nexists \int_M^{+\infty} F(x) \text{ FINITO}$$

2) CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO (FUNZIONI POSITIVE)

DATA $F(x)$, SUPPONENDO DI AVERE $g(x)$, TALE CHE

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

ALLORA:

SE $g(x)$ CONVERGE $\Rightarrow$ $F(x)$ CONVERGE

SE $g(x)$ DIVERGE $\Rightarrow$ $F(x)$ DIVERGE

3) CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA (SEGNO QUALSIASI)

DATA $f(x)$, CONSIDERO LA CONVERGENZA DELL' INTEGRALE:

$$\int_{M}^{+\infty} |F(x)|\, dx$$

SE:

$$\int_{M}^{+\infty} |F(x)|\, dx \text{ CONVERGE} \Rightarrow \int_{M}^{+\infty} F(x)\, dx \text{ CONVERGE}$$

$$\int_{M}^{+\infty} |F(x)|\, dx \text{ DIVERGE} \Rightarrow \int_{M}^{+\infty} f(x)\, dx \text{ DIVERGE}$$

FUNZIONI - TEST

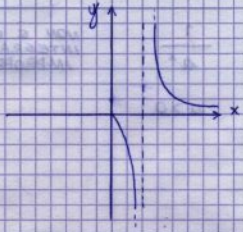
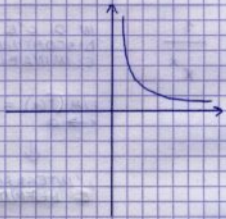
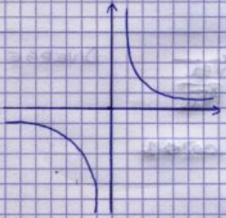
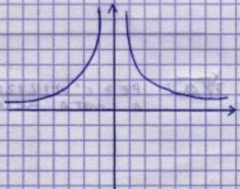
LE FUNZIONI-TEST SONO DELLE FUNZIONI CHE VERIFICANO LA SEGUENTE CONDIZIONE:

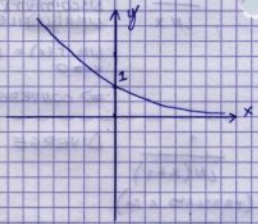
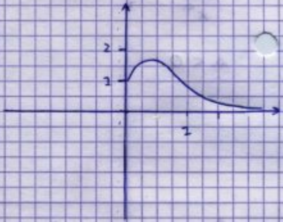
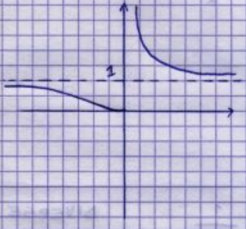
$\lim_{x \to +\infty} (Fx) = 0$ OPPURE $\lim_{x \to 0} F(x) = +\infty$

CIOÈ UNA FUNZIONE CHE SI AVVICINA ASINTOTICAMENTE A UN ASSE.

IL FATTO CHE SI AVVICINANO A UN ASSE, RIDUCENDO L'AREA, NON IMPLICA CHE L'AREA SIA DEFINITA.
ESISTE UNA SCALA DI PARAGONE:

$\frac{1}{\ln x}$	$\frac{1}{x^{\alpha}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^{\alpha}}$	$\frac{1}{a^{x}}$	$\frac{1}{x^{x}}$
	$\alpha < 1$		$\alpha > 1$	$a > 1$	
ORDINE DI INFINITO INFERIORE		DIVISORIO: DIVERGE SEMPRE			ORDINE DI INFINITO SUPERIORE

FUNZIONE	INTEGRALE IN ZERO	INTEGRALE A INFINITO	GRAFICO
$\frac{1}{\ln x}$	IN 0 C'È UNA DISCONTINUITÀ ELIMINABILE: $\lim_{x \to 0} F(x) = 0$ $\Rightarrow$ CONVERGE	DIVERGE	
$\frac{1}{\ln(x+1)}$ (TRASLATO A SX)	DIVERGE	DIVERGE	
$\frac{1}{x^a}$ $a < 1$	CONVERGE	DIVERGE	
$\frac{1}{x}$	DIVERGE	DIVERGE	
$\frac{1}{x^a}$ $a > 1$	DIVERGE	CONVERGE	

FUNZIONE	INTEGRALE IN ZERO	INTEGRALE A INFINITO	GRAFICO
$\frac{1}{a^x}$ $a > 0$	NON È UN INTEGRALE IMPROPRIO	CONVERGE	
$\frac{1}{x^x}$	IN 0 C'È UNA DISCONTINUITÀ ELIMINABILE: $\lim_{x \to 0} F(x) = 1$ $\Downarrow$ L'INTEGRALE È DEFINITO	CONVERGE	
$\sqrt[x]{a}$ $a > 0$	DIVERGE	DIVERGE	

NB: PER L'UTILIZZO PRATICO DELLE PRECEDENTI FUNZIONI, VEDI IL NOTA BENE ALLA FINE.

LE PRECEDENTI FUNZIONI SONO QUELLE ALLE QUALI SI POSSONO RICONDURRE LA MAGGIOR PARTE DELLE FUNZIONI COMUNI.

PROCEDIMENTO GENERALE:

1) SI INDIVIDUA L'ESTREMO CRITICO NEL QUALE L'INTEGRALE PUÒ RISULTARE INDEFINITO, FACENDO I LIMITI DI $F(x)$ NEGLI ESTREMI

2) SI SEMPLIFICA LA FUNZIONE INTEGRANDA, INDIVIDUANDO UNA FUNZIONE PIÙ SEMPLICE ALLA QUALE È ASINTOTICA IN QUELL'ESTREMO

3) SI CONCLUDE SE L'INTEGRALE È DEFINITO O INDEFINITO

ESEMPIO:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[5]{x+1}}\,dx$$

$\lim_{x \to 0} (Fx) = 0 \Rightarrow$ DEFINITA (1)

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty \Rightarrow$ IMPROPRIO

(2) ASINTOTICITÀ DI $F(x)$

POICHÈ $x \to +\infty$, SI PUÒ SCRIVERE

$$\frac{x}{\sqrt[5]{x+1}} \simeq \frac{x}{\sqrt[5]{x}}$$

PERCHÈ 1 È TRASCURABILE RISPETTO A $+\infty$

TRA x E $\sqrt[5]{x}$, L'ORDINE DI INFINITO DOMINANTE È x, QUINDI $\sqrt{x}$ È TRASCURABILE.

SI SCRIVE:

$$\frac{x}{\sqrt[5]{x}} \simeq x$$

(3) QUINDI:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[5]{x+1}}\,dx \simeq \int_0^{+\infty} x\,dx = +\infty \Rightarrow \text{DIVERGENZA}$$

ESEMPIO 2

$$\int_0^1 \frac{\log^2(x+1)}{\operatorname{sen}(2x^3)}\,dx$$

UTILIZZO GLI SVILUPPI IN SERIE DI TYLOR

$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

QUINDI:

$$\frac{\log^2(x+1)}{\operatorname{sen}(2x^3)} = \frac{(x)^2}{2x^3} = \frac{1}{2x} \simeq \frac{1}{x}$$

QUINDI:

$$\int F(x) \simeq \int \frac{1}{x} = +\infty \Rightarrow \text{DIVERGE}$$

N.B: LA SCALA DI VALORI INDICATA PRECEDENTEMENTE, SI LEGGE COSÌ:

INDEGRALI INDEFINITI IN ZERO: CONVERGE $\longrightarrow$ DIVISORIO $\longrightarrow$ DIVERGE

INTEGRALI INDEFINITI A INFINITO: DIVERGE $\longrightarrow$ DIVISORIO $\longrightarrow$ CONVERGE