

Calcoli con incertezze e errori

Cifre significative

Le cifre significative sono le cifre certe, e la prima cifra incerta

$$3,456 \pm 0,003$$

Se il valore inizia a sinistra con uno o più zeri, questi zeri non valgono per le cifre significative. Si parte a contare dal primo valore diverso da 0 a sinistra. Infatti:

$$0,0038 = 3,8 \cdot 10^{-3} \Rightarrow 2 \text{ cifre significative}$$

Se il valore termina a destra con uno o più zeri, gli zeri vengono per il conteggio delle cifre significative. Infatti gli zeri indicano che si è incerti su quel valore decimale:

$$3,150 \pm 0,002 \rightarrow \text{Lo zero indica che l'incertezza è sui millesimi}$$

Calcoli con cifre significative

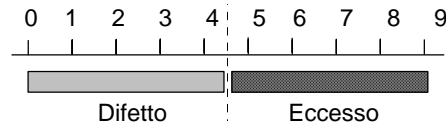
1) Si compie l'operazione con tutte le cifre significative di ciascun operando.

2) Si tronca il risultato al numero di cifre significative dell'operando con minor precisione, compiendo un arrotondamento delle cifre escluse

$$0,00322 \cdot 0,42 = 0,0013524 \rightarrow 0,0014$$

↓	↓	↓
3 cifre signific.	2 cifre signific.	2 cifre signific.

Arrotondamenti per eccesso e difetto



Ordine di grandezza

L'ordine di grandezza di un valore è la potenza del 10 alla quale il valore si avvicina di più con arrotondamento

$$490 \rightarrow \text{Ordine di grandezza di } 10^2$$

$$510 \rightarrow \text{Ordine di grandezza di } 10^3$$

Calcolo: per calcolare l'ordine di grandezza, si procede così:

a) Si esegue:

$$p = \log_{10} x$$

2) Si arrotonda p al valore intero

Incertezza deterministica

L'incertezza deterministica valuta i casi estremi della misurazione: il valore minimo o massimo entro i quali cade sicuramente la grandezza misurata

Valore medio: $\bar{X} = \frac{\sum_{k=1}^N x_k}{n}$

Errore/incertezza assoluti: $\Delta X = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{2}$

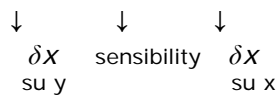
Errore/incertezza relativo: $\frac{\Delta X_{\max}}{X} = \frac{\text{Errore massimo}}{\text{Valore più probabile}}$

Errore relativo percentuale: $\frac{\Delta X_{\max}}{X} \% = \frac{\Delta X_{\max}}{X} \cdot 100$ $\frac{\Delta X_{\max}}{X}$ espresso come frazione di 100

Propagazione dell'incertezza deterministica

$$\delta y = |f'_{x_1}| \cdot \delta x_1 + |f'_{x_2}| \cdot \delta x_2 + \dots \rightarrow \text{incertezza assoluta}$$

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{x \cdot f(x)'}{f(x)} \cdot \frac{\delta x}{x} \rightarrow \text{incertezza relativa}$$



Per alcune operazioni semplici, si può utilizzare la seguente tabella, nella quale è già stata calcolata la propagazione dell'incertezza.

Operazione	Incertezza deterministica
$Y = a \pm b$	$\delta y = \delta a + \delta b$ $\frac{\delta y}{y} = \frac{\delta a}{a} \cdot \frac{a}{y} + \frac{\delta b}{b} \cdot \frac{b}{y}$
$y = a \cdot b$	$\delta y = a \cdot \delta b + b \cdot \delta a$ $\frac{\delta y}{y} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b}$
$y = \frac{a}{b}$	$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} \right)$ $\frac{\delta y}{y} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b}$
$y = a^a$	$\delta y = a \cdot a^{a-1} \cdot \delta a$ $\frac{\delta y}{y} = a \cdot \frac{\delta a}{a}$
$y = a \cdot a + \beta \cdot b + \dots$	$\delta y = a \cdot \delta a + \beta \cdot \delta b + \dots$
$y = a \cdot a$	$\delta y = a \cdot \delta a$ $\frac{\delta y}{y} = \frac{\delta a}{a}$
$y = a^a + b^b + c^c + \dots$	$\frac{\delta y}{y} = a \frac{\delta a}{a} + \beta \frac{\delta b}{b} + \dots$

Incertezza Statistica

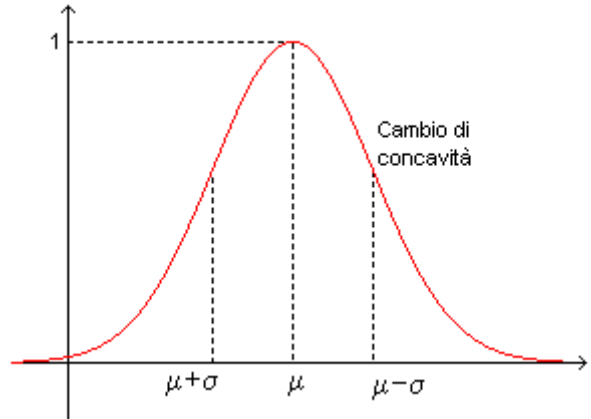
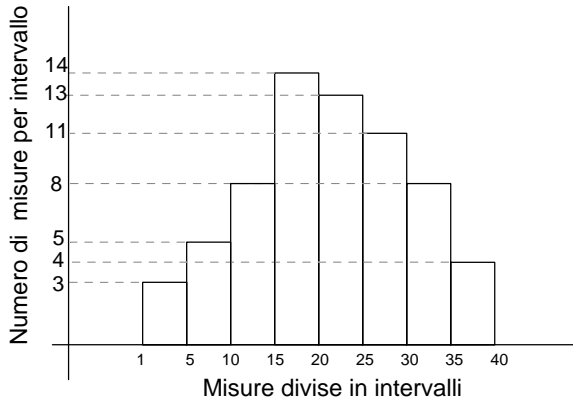
L'incertezza statistica ha un carattere ottimistico: indica sempre una fascia di valori entro i quali è più probabile che cada il valore vero della misura compiuta.

Istogramma

I valori ottenuti da una serie misurazioni possono essere inseriti in un istogramma.

Asse X: sull'asse x è riportato il valore delle misure realizzate. Non sono rappresentate le singole misure, ma intervalli di misure, in ordine crescente.

Asse Y: sull'asse y è riportato il numero di misure che cadono in ciascun intervallo.



Curva di Gauss

Definizione: la curva di Gauss è la generalizzazione dell'istogramma. Indica che probabilità ha una variabile di assumere un determinato valore.

Asse x: possibili valore della variabile (da $-\infty$ a $+\infty$)

Asse y: probabilità che la variabile assuma il valore indicato in ascissa.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Dove: μ = valore più attendibile della grandezza misurata (media)

σ = scarto quadratico medio, o deviazione standard

Significato: nel campo delle misurazioni, indica la probabilità che la misura ottenuta cada all'interno di una certa fascia:

$$x_m \pm \sigma$$

Indica che il valore vero della grandezza misurata ha il 67% di probabilità di esser compreso tra $x_m - \sigma$ e $x_m + \sigma$.

Condizioni: - numero di misure infinito
- eventi statisticamente indipendenti

Deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}}$$

Dove: x_i = iesimo valore misurato

μ = valore più probabile (media)

n = numero di misure

Significato: Indica la semi-ampiezza della fascia dentro la quale è più probabile che cada il valore vero della misurazione. E' cioè l'incertezza statistica. Matematicamente, all'aumentare del numero n di misurazioni, la deviazione standard diminuisce, la gaussiana si stringe e l'incertezza si riduce.

Intervallo	Probabilità che i valori cadano nell'intervallo
$x \pm \sigma$	67,8 %
$x \pm 2\sigma$	95,5%
$x \pm 3\sigma$	99,7%

Propagazione dell'incertezza statistica

$$\delta y = \sqrt{(f'_{x_1} \cdot \delta x_1)^2 + (f'_{x_2} \cdot \delta x_2)^2 + \dots}$$

Operazione	Incertezza probabilistica
$Y = a \pm b$	$\delta y = \sqrt{(\delta a)^2 + (\delta b)^2}$
$y = a \cdot b$	$\frac{\delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta b}{b}\right)^2}$
$y = \frac{a}{b}$	$\frac{\delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta b}{b}\right)^2}$
$y = a^a$	$\frac{\delta y}{y} = a \cdot \frac{\delta a}{a}$
$y = a \cdot a + \beta \cdot b + \dots$	$\delta y = \sqrt{(a \cdot \delta a)^2 + (\beta \cdot \delta b)^2 + \dots}$
$y = a^a + b^b + c^c$	$\frac{\delta y}{y} = \sqrt{\left(a \cdot \frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(b \cdot \frac{\delta b}{b}\right)^2 + \dots}$

Propagazione dell'errore

Nota: gli errori sono trattati come le incertezze deterministiche, ma il loro valore è con il segno, e va corretto sulla misurazione compiuta, non va lasciato indicato con $\pm \Delta x$.

$$\Delta y = f'_{x_1} \cdot \Delta x_1 + f'_{x_2} \cdot \Delta x_2 + \dots$$

Operazione	Errore
$Y = a \pm b$	$\Delta y = \Delta a \pm \Delta b$ $\frac{\delta y}{y} = \frac{\delta a}{a} \cdot \frac{a}{y} \pm \frac{\delta b}{b} \cdot \frac{b}{y}$
$y = a \cdot b$	$\Delta y = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a$ $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
$y = \frac{a}{b}$	$\Delta y = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}\right)$ $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}$
$y = a^a$	$\Delta y = a \cdot a^{a-1} \cdot \Delta a$ $\frac{\Delta y}{y} = a \cdot \frac{\Delta a}{a}$
$y = a \cdot a + \beta \cdot b + \dots$	$\Delta y = a \cdot \Delta a + \beta \cdot \Delta b + \dots$
$y = a^a + b^b + c^c + \dots$	$\frac{\Delta y}{y} = a \cdot \frac{\Delta a}{a} + \beta \cdot \frac{\Delta b}{b} + \dots$