

Sistemi LTI: definizioni

Segnale: qualsiasi forma fisica (onda elettromagnetica, onda meccanica, onda luminosa, ecc) che è in grado, tramite la variazione di una delle sue caratteristiche, di trasporre delle informazioni.

Supporto di un segnale: insieme di tutte le ascisse per cui il segnale non è nullo

Sistema: qualsiasi struttura che riceve in ingresso un segnale $x(t)$, vi applica una trasformazione generica L , e da in uscita un segnale trasformato $y(t)$.



Sistema lineare: una trasformazione L è detta lineare se vale la proprietà:

$$L[a \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t)] = a \cdot L[x_1(t)] + \beta \cdot L[x_2(t)]$$

Sistema Tempo-invariante: un sistema è tempo-invariante se ritardando o anticipando il segnale $x(t)$ al suo ingresso, il segnale $y(t)$ all'uscita risulta ritardato o anticipato della stessa quantità:

$$L[x(t \pm t_0)] = y(t \pm t_0)$$

Sistema senza memoria: un sistema è senza memoria se il valore assunto dal segnale di uscita in un dato istante di tempo dipende solo dal valore del segnale di ingresso nello stesso istante.

Risposta all'impulso $h(t)$: *significato matematico*: segnale in uscita dal sistema L che si ottiene quando all'ingresso del sistema è posto come segnale un impulso unitario $\delta(t)$.

significato fisico: indica come in sistema LTI modifica l'ampiezza del segnale $x(t)$ istante per istante.



Funzione di trasferimento $H(f)$: *significato fisico*: indica come il sistema LTI modifica ogni singola armonica del segnale in ingresso $x(t)$.

significato matematico: trasformata di Fourier della risposta all'impulso $h(t)$.

Fisica realizzabilità: un sistema è fisicamente realizzabile se può essere costruito nella realtà

Sistema LTI reale: un sistema LTI è reale se valgono queste condizioni:

- 1) *Risposta all'impulso*: funzione reale
- 2) *Funzione di trasferimento*:
 - $\text{Re}[H(f)] \rightarrow$ reale e pari
 - $\text{Im}[H(f)] \rightarrow$ immaginaria e dispari
 - $|H(f)| \rightarrow$ pari
 - $\angle H(f) \rightarrow$ dispari

Sistema LTI Causale: *definizione fisica*: nel sistema LTI non è possibile ottenere una uscita prima che sia stato applicato il relativo ingresso

definizione matematica: $h(t) = 0 \quad t < 0$

Trasformazione di un segnale

Dati: $x(t)$ = segnale in ingresso al sistema LTI
 $h(t)$ = funzione di trasferimento del sistema LTI
 $y(t)$ = segnale in uscita del sistema LTI

Formule: $y(t) = x(t) * h(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u) \cdot h(u) du$$

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

NOTA: un sistema LTI non può creare nuove frequenze, solo modificare fase / modulo di quelle esistenti

Funzioni di correlazione dell'energia

Autocorrelazioni e energia	Correlazioni
$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$ \downarrow $R_x(\tau) \rightarrow \boxed{R_h(\tau)} \rightarrow R_y(\tau)$ \downarrow $S_x(f) \rightarrow \boxed{ H(f) ^2} \rightarrow S_y(f)$	$S_x(\tau) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow S_{yx}(f)$ $S_x(\tau) \rightarrow \boxed{H^*(f)} \rightarrow S_{xy}(f)$ $R_x(\tau) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow R_{yx}(\tau)$ $R_x(\tau) \rightarrow \boxed{h^*(-t)} \rightarrow R_{xy}(\tau)$

Funzioni di correlazione della potenza

Autocorrelazioni e potenza	Correlazioni
$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$ \downarrow $\phi_x(\tau) \rightarrow \boxed{R_h(\tau)} \rightarrow \phi_y(\tau)$ \downarrow $S_x(f) \rightarrow \boxed{ H(f) ^2} \rightarrow S_y(f)$	\

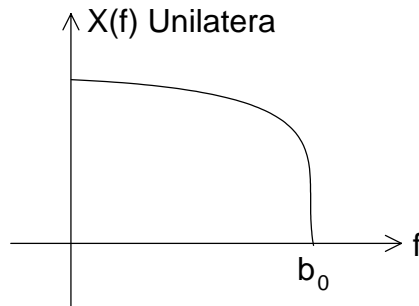
Stabilità BIBO (bound input, bound output)

Definizione: se $|x(t)| < \infty$ allora $|y(t)| < \infty$
 se il segnale in ingresso è limitato, il segnale in uscita è limitato

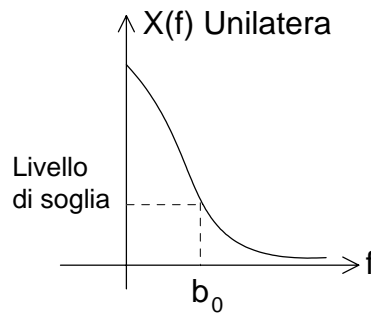
Condizione: a) $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$
 b) $\text{Re}[poli \text{ di } H(s)] < 0$

Banda

Banda limitata: intervallo di frequenze entro le quali esistono armoniche non nulle del segnale $x(t)$. Poichè si parla di banda limitata, si suppone che le componenti del segnale $x(t)$ non siano presenti a tutte le frequenze, ma solo in una gamma limitata, detta appunto banda.



Banda illimitata: intervallo di frequenze entro le quali esistono armoniche del segnale $x(t)$ con valore più grande di una certa soglia prestabilita. Poichè si parla di banda illimitata, si suppone che le componenti del segnale $x(t)$ siano presenti a tutte le frequenze, ma vengano considerate importanti solo quelle con valore più grande di una certa soglia.



Banda di un segnale: intervallo di frequenza entro cui è contenuta la maggior parte (99% ad esempio) dell'energia del segnale.

banda di un sistema a 3 dB: si possono dare due definizioni equivalenti, entrambe applicate a sistemi che hanno una $H(f)$ più o meno costante fino a un certo punto, di ampiezza A :

a) Intervallo di frequenze entro il quale vale:

$$A^2 \leq |H(f)|^2 \leq \frac{A^2}{2}$$

b) Frequenza alla quale l'energia o la potenza media della sinusoide in ingresso vengono ridotte alla metà

Distorsione

sistema non distortore: un sistema è detto non distortore se le uniche modifiche apportate a un segnale sono: a) Moltiplicazione per costante
b) Ritardo/anticipo

Cioè se vale che:

$$y(t) = a \cdot x(t \pm \beta)$$

$$H(F) = a \cdot e^{-j2\pi\beta \cdot f}$$

In caso contrario, cioè se il sistema viene modificato, si dice distortore.

NOTA: queste condizioni si devono verificare all'interno della banda del segnale in ingresso, non al di fuori.

Distorsione lineare: *definizione:* distorsione ad opera di un sistema LTI

esempio: amplificatore in zona di lavoro

correzione: mediante un altro sistema lineare, detto *equalizzatore*, con funzione di trasferimento $E(f)$ che compensa le modifiche apportate dal sistema LTI distortore:

$$H(f) \cdot E(f) = a \cdot e^{-j2\pi\beta \cdot f}$$

Distorsione non lineare: *definizione:* distorsione ad opera di un sistema non lineare

Esempio: amplificatore in saturazione

Correzione: difficilmente correggibile

Cascata di sistemi LTI: per porre in sequenza più sistemi LTI basta moltiplicare le rispettive funzioni di trasferimento. Non conta l'ordine.